Quadratische Funktionen

Funktionen mit Gleichungen der Form $y = ax^2 + bx + c$ (allgemeine Form) bzw. $y = a\,(x - x_S)^2 + y_S$ (Scheitelform) mit den Formvariablen $a \neq 0$, b und $c \in \mathbb{R}$ bzw. a, x_S und $y_S \in \mathbb{R}$ heißen quadratische Funktionen. Ihre Graphen sind Parabeln, speziell für $a = \pm 1$: Normalparabeln. Der höchste bzw. tiefste Punkt des Graphen heißt Scheitel(punkt) S. Der Graph ist jeweils achsensymmetrisch zur senkrechten Geraden durch S; die beiden Teile der Parabel links und rechts dieser Symmetrieachse heißen Parabeläste.

Die Formvariablen haben folgende Bedeutung:

a: beschreibt Richtung und Form der Parabel („Formfaktor", „Öffnungsfaktor", „Streckfaktor")

$a > 0$: nach oben geöffnet	$\lvert a\rvert > 1$: gestreckt (schmaler als Normalparabel)
$a < 0$: nach unten geöffnet	$\lvert a\rvert < 1$: gestaucht (breiter als Normalparabel)

$$a = \frac{\Delta y}{(\Delta x)^2} = \frac{y_P - y_S}{(x_P - x_S)^2} \text{ (vom Scheitel aus gehen!)}$$

(b: Steigung der Parabel im Schnittpunkt mit der y-Achse)

c: y-Achsenabschnitt

x_S: Abszisse von S

y_S: Ordinate von S

Berechnung von S aus der allgemeinen Form:

allgemein	**Beispiel: $f(x) = 2x^2 - 6x + 5$**
$x_S = -\frac{b}{2a}$	$x_S = -\frac{-6}{2 \cdot 2} = 1{,}5$
$y_S = f(x_S)$	$y_S = 2 \cdot 1{,}5^2 - 6 \cdot 1{,}5 + 5 = 0{,}5$ ➔ S(1,5|0,5)

Gleichungen lösen: *(z. B. für das Berechnen von Nullstellen und Schnittstellen)*

1) für b = 0 („reinquadratisch"):

allgemein	**Beispiel**
x^2 isolieren	$2x^2 - 18 = 0 \mid +18$ $2x^2 = 18 \mid :2$ $x^2 = 9$
$\pm\sqrt{\ }$ ziehen	$x_{1,2} = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ *(d. h. $x_1 = 3$, aber $x_2 = -3$)*

2) für c = 0 („defektquadratisch"):

allgemein	**Beispiel**
a x ausklammern	$3x^2 + 6x = 0$ ➔ $3x\,(x + 2) = 0$
Lösungen ablesen (immer: $x_1 = 0$!)	$x_1 = 0$; $x_2 = -2$

Satz vom Nullprodukt (SvP):
Ein Produkt ist genau dann gleich Null, wenn einer der Faktoren gleich Null ist.

3) mit 1. oder 2. binomischer Formel:

allgemein	**Beispiel**
a ausklammern, 1. oder 2. bin. Formel rückwärts	$-2x^2 + 12x - 18 = 0$ $-2\,(x^2 - 6x + 9) = 0$ $-2\,(x - 3)^2 = 0$
Lösung ablesen (immer: $x_1 = x_2$!)	$x_{1,2} = 3$ *(d. h. $x_1 = 3$ und $x_2 = 3$)*

4) Lösungsformel / a-b-c-Formel / Mitternachtsformel:

allgemein	**Beispiel: $2x^2 - 6x + 4 = 0$**
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_{1,2} = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4}}{2 \cdot 2} = \frac{6 \pm 2}{4}$ ➔ $x_1 = 1$; $x_2 = 2$
alternativ: p-q-Formel; dafür aber vorher erst mal durch a teilen! $x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$	$2x^2 - 6x + 4 = 0 \mid :2$ $x^2 - 3x + 2 = 0$ $x_{1,2} = -\frac{-3}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{-3}{2}\right)^2 - 2} = \frac{3}{2} \pm \frac{1}{2}$ ➔ $x_1 = 1$; $x_2 = 2$

Anzahl der Lösungen: Diskriminante D = $b^2 - 4ac$; *alternativ:* D = $\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q$

D < 0: keine Lösung
D = 0: eine (doppelte) Lösung
D > 0: zwei (einfache) Lösungen

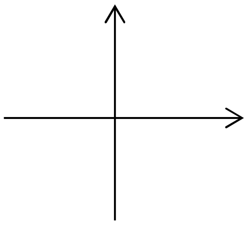
5) in Scheitelform:

allgemein	**Beispiel**
Klammer isolieren	$2\,(x + 1)^2 - 18 = 0 \mid +18$ $2\,(x + 1)^2 = 18 \mid :2$ $(x + 1)^2 = 9$
$\pm\sqrt{}$ ziehen, dann x isolieren	$x + 1 = \pm 3 \;\; \mid -1$ $x_{1,2} = = \pm 3 - 1$ ➔ $x_1 = -4$; $x_2 = 2$

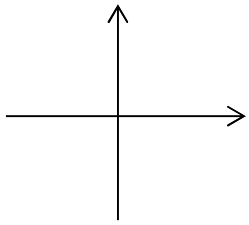
<u>Faktorisierung / Linearfaktorform / Produktform:</u>
Sind x_1 und x_2 die (verschiedenen) Nullstellen einer quadratischen Funktion, so kann man ihren Funktionsterm auch in der Form $f(x) = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$ schreiben; x_1 und x_2 heißen dann <u>einfache Nullstellen</u>. Ist x_1 die einzige Nullstelle, so kann man den Funktionsterm auch in der Form $f(x) = a\,(x - x_1)^2$ schreiben. x_1 heißt dann eine <u>doppelte Nullstelle</u> der Funktion.

graphisch:

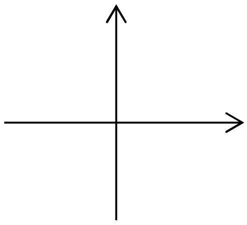
zwei einfache Nullstellen:



oder



eine doppelte Nullstelle:



oder