Das Vektorprodukt

Gesucht ist ein Vektor $\vec{n}$, der senkrecht zu zwei vorgegebenen Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ ist. Es soll also gelten:

$$\vec{n} \cdot \vec{a} = 0 \quad \text{und} \quad \vec{n} \cdot \vec{b} = 0$$

In Komponenten geschrieben führt dies auf die beiden Gleichungen

$$n_1 a_1 + n_2 a_2 + n_3 a_3 = 0 \text{ (I)}$$
$$n_1 b_1 + n_2 b_2 + n_3 b_3 = 0 \text{ (II)}$$

Dieses LGS soll nun allgemein gelöst werden.

1) Eliminieren Sie zunächst n_1

2) Es bleibt eine Gleichung, die n_2 und n_3 enthält. Lösen Sie diese Gleichung nach n_2 auf. Stellen Sie den Nenner des auftretenden Bruchs so um, dass der gesamte Term vorne kein Minuszeichen mehr hat.

3) Das LGS hat unendlich viele Lösungen (geometrische Begründung?). Eine der drei Komponenten n_1, n_2, n_3 ist also frei wählbar. Wählen Sie nun also n_3 so, dass sich für n_2 kein Bruch ergibt (Zwischenergebnis: $n_2 = a_3 b_1 – a_1 b_3$).

4) Setzen Sie n_2 und n_3 in (I) ein und berechnen Sie n_1.