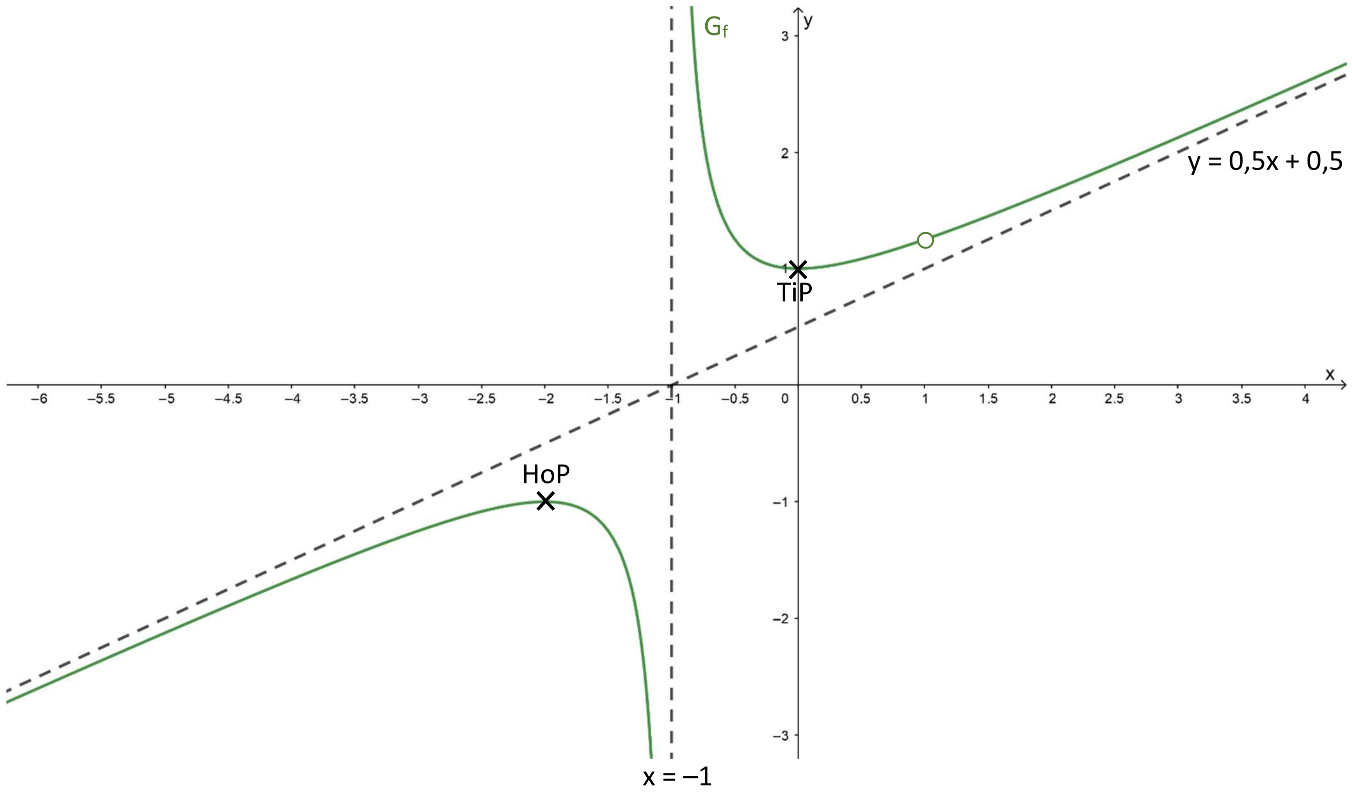
Kurvendiskussion gebrochenrationaler Funktionen

allgemein (Zählergrad: ZG; Nennergrad: NG)	Beispiel: f(x) = $\frac{x^3+x^2-2}{2x^2-2}$
1. Definitionsmenge Definitionslücken sind die Nullstellen des Nenners	$2x^2 - 2 = 0$ ➔ $x_1 = 1$, $x_2 = -1$ ➔ $D_f = \mathbb{R}\backslash\{1; -1\}$
2. Symmetrie (auch D_f muss symm. zu 0 sein!) Zähler und Nenner beide gerade oder beide ungerade: Graph symmetrisch zur y-Achse; einer ungerade, der andere gerade: symmetrisch zum Ursprung; sonst keine Symmetrie zum KS	D_f ist zwar symmetrisch zu 0, aber: Zähler ist weder gerade noch ungerade (, Nenner ist gerade) ➔ keine Symmetrie zum KS
3. Gemeinsame Punkte mit den Achsen mit y-Achse: f(0) berechnen mit x-Achse: Nullstellen von f sind die Nullstellen des Zählers, die zu D_f gehören	f(0) = (-2)/(-2) = 1 ➔ $S_y(0\|1)$ $x^3 + x^2 - 2 = 0$ ➔ $x_3 = 1 \notin D_f$ ➔ keine Nullstellen
4. Asymptoten / Definitionslücken waagrechte und schiefe Asymptoten: ZG < NG ➔ waagrechte Asymptoe: y = 0 (x-Achse) ZG = NG ➔ waagrechte Asymptote: y = $\frac{LK\ Z}{LK\ N}$ ZG > NG ➔ Polynomdivision nötig; der ganzrationale Teil des Ergebnisses gibt die schräge Asymptote (ZG = NG + 1) bzw. Asymptotenkurve (ZG > NG + 1) an Für die Annäherung von oben / unten an die Asymptote untersucht man, ob der echt gebrochenrationale Teil (nach der Polynomdivision) jeweils gegen 0^+ bzw. 0^- geht. senkrechte Asymptoten: Funktionsterm faktorisieren (i. A. in der Asymptotenform einfacher!) und so viel wie möglich kürzen; die dann noch übrigen Definitionslücken sind Polstellen (gerade Vielfachheit: ohne VZW; ungerade: mit VZW); an jeder Polstelle ist eine senkrechte Asymptote behebbare Definitionslücken: evtl. Funktionswerte mit stetiger Fortsetzung (gekürzte Funktion) berechnen	3 > 2 ➔ Polynomdivision: f(x) = 0,5x + 0,5 + $\frac{x-1}{2x^2-2}$ ➔schräge Asymptote: y = 0,5x + 0,5 $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x-1}{2x^2-2} = 0^-$ ➔ Annäherung an As. von unten $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x-1}{2x^2-2} = 0^+$ ➔ Annäherung an As. von oben Faktorisierung: $f(x) = 0{,}5x + 0{,}5 + \frac{x-1}{2(x+1)(x-1)}$ ➔ $\bar{f}(x) = 0{,}5x + 0{,}5 + \frac{x-1}{2(x+1)(x-1)}$➔ Polstelle $x_2 = -1$ (1. Ordnung ➔ VZW) ➔ senkrechte Asymptote: x = –1 bei behebbarer Definitionslücke $x_1 = 1$: $\bar{f}(1) = \frac{5}{4}$
5. Ableitungen so wenig wie möglich; bei 2. Ableitung für die Ableitung des Nenners meist Kettenregel und kürzen sinnvoll; i. A. ist bei der (gekürzten) Asym.form das Ableiten leichter, aber die folgenden Rechnungen dann evtl. komplizierter	$f'(x) = 0{,}5 - \frac{1}{2(x+1)^2}$; $f''(x) = \frac{1}{(x+1)^3}$
6. Extremstellen notwendig: $f'(x_0) = 0$ (D_f beachten!) hinreichend: VZW von f ' bei x_0 bzw. $f''(x_0) \neq 0$ (dafür) evtl. Monotonieintervalle bestimmen (Vorzeichentabelle oder graphisch)	$0{,}5 - \frac{1}{2(x+1)^2} = 0$ ➔ $(x+1)^2 = 1$ ➔ $x_4 = 0 \in D_f$, $x_5 = -2 \in D_f$ $f''(0) = 1 > 0$, $f''(-2) = -1 < 0$, $f(0) = 1$; $f(-2) = -1$ ➔ HoP(–2|–1), TiP(0|1) für Vorzeichentabelle / graphische Bestimmung der Monotonieintervalle: f '(x) erst als Bruch schreiben! $f'(x) = \frac{(x+1)^2 - 1}{2(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x}{2(x+1)^2}$ Nenner ist in D_f immer > 0 ➔ VZ wird vom Zähler bestimmt; also: f ' > 0 für x < –2 oder x > 0, f '< 0 für –2 < x < –1 und –1 < x < 0 (D_f beachten!), ➔ G_f ist smf in [–2;–1[und]–1;0], sms in $]-\infty; -2]$ und $[0; \infty[\ \backslash\{1\}$
6. Wendestellen notwendig: $f''(x_0) = 0$ (D_f beachten!) hinreichend: VZW von f '' bei x_0 (bzw. $f''(x_0) \neq 0$) (dafür) evtl. Krümmungsintervalle bestimmen (Vorzeichentabelle oder graphisch)	$\frac{1}{(x+1)^3} \neq 0$ für alle x ➔ keine Wendestellen f '' > 0 für x > –1; f '' < 0 für x < –1 ➔ G_f ist rechtsgekrümmt in $]-\infty; -1[$, linksgekrümmt in $]-1; \infty[\ \backslash\{1\}$



G_f
y
x
y = 0,5x + 0,5
TiP
HoP
x = –1