Ein überraschendes Integral

In Kapitel II wurde als Bonus das „Dirichlet-Integral‘‘ berechnet:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn wir dieses Ergebnis verwenden, dann können wir nun mit einer ähnlichen Methode wie dort und unserem nun zusätzlichen Wissen über Differenzialgleichungen auch ein ähnliches, aber noch etwas komplizierteres Integral ausrechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx = ?$$

Führen wir erst mal, ähnlich wie bei der Berechnung des Dirichlet-Integrals, einen zusätzlichen Parameter $t > 0$ ein:

$$I(t) := \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2+1}\,dx$$

Offensichtlich ist I(1) unser oben gesuchtes Integral, und

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0} I(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(0)}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2+1}\,dx = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}\int_a^b \frac{1}{x^2+1}\,dx \\ &= \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}[\arctan(x)]_a^b = \lim_{a\to-\infty}\lim_{b\to\infty}(\arctan(b) - \arctan(a)) \\ &= \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.\end{aligned}$$

(Mal wieder: Man darf den Grenzwert $t \to 0$ mit den Integralgrenzwerten vertauschen, weil das uneigentliche Integral existiert.)

Um I(t) allgemein zu berechnen, betrachten wir nun erst mal Ableitungen davon (wieder ähnlich wie bei der Berechnung des Dirichlet-Integrals). Wieder vertauschen wir Ableitung und Integral einfach (wieder klappt das, weil das Integral nicht divergiert),

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(tx)}{x^2+1}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{dt}\frac{\cos(tx)}{x^2+1}\,dx = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)\cdot x}{x^2+1}\,dx$$

Wie oben schon erwähnt, wollen wir das Dirichlet-Integral verwenden. Also müssen wir irgendwie den Faktor x in den Nenner bekommen, den Faktor $x^2 + 1$ aber loswerden. Um das erste Ziel zu erreichen, erweitern wir den Bruch mit x,

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)\cdot x^2}{(x^2+1)\cdot x}\,dx.$$

Oben haben wir nun schon mal ein x^2, können also fast schon kürzen – es fehlt nur noch +1. Fügen wir diese +1 also ein und, damit sich der Wert des Terms nicht ändert, gleich noch eine –1 dahinter:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)\cdot(x^2+1-1)}{(x^2+1)\cdot x}\,dx.$$

Jetzt multiplizieren wir die Klammer aus, teilen den Bruch in eine Differenz von zwei Summen auf und dann das Integral in eine Summe von zwei Integralen,

$$\begin{aligned}\frac{dI(t)}{dt} = -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(tx)\cdot(x^2+1) - \sin(ax)}{(x^2+1)\cdot x}\,dx &= \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{\sin(tx)\cdot(x^2+1)}{(x^2+1)\cdot x} - \frac{\sin(tx)}{(x^2+1)\cdot x}\right)dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(tx)}{x}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(tx)}{(x^2+1)\cdot x}\,dx,\end{aligned}$$

wobei wir im ersten Integral gleich gekürzt haben. Das erste Integral ist nun bis auf den zusätzlichen Faktor t (und das Vorzeichen) in der Tat das Dirichlet-Integral. Durch die Substitution u = tx kann man den Faktor t aber loswerden (hier ist nun wichtig, dass t > 0 ist!), und man hat genau das Dirichlet-Integral. Also bleibt erst mal:

$$\frac{dI(t)}{dt} = -\pi + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(tx)}{(x^2+1)\cdot x}\,dx,$$

und daraus folgt auch sofort $\lim\limits_{t\to 0}\frac{dI(t)}{dt} = -\pi + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{0}{(x^2+1)\cdot x}\,dx = -\pi.$

Das zweite Integral muss noch berechnet werden. Leider sieht das jetzt sogar deutlich komplizierter aus als das ursprüngliche… Aber erinnern wir uns daran, dass wir beim Ableiten einen Faktor x zusätzlich bekommen – mit dem können wir das x im Nenner kürzen! Und das $-\pi$ ist ja einfach ein konstanter Summand, der fällt beim Ableiten weg. Wir haben also für die *zweite* Ableitung der Funktion I(a) nun:

$$\begin{aligned}\frac{d^2I(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt}\left(-\pi + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin(tx)}{(x^2+1)\cdot x}\,dx\right) = 0 + \int_{-\infty}^{\infty}\frac{d}{dt}\frac{\sin(tx)}{(x^2+1)\cdot x}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(tx)\cdot x}{(x^2+1)\cdot x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(tx)}{x^2+1}\,dx,\end{aligned}$$

und das ist genau wieder unsere ursprüngliche Funktion I(t)!

Letztlich haben wir also eine (sehr einfache!) Differenzialgleichung für I(t): $\ddot{I} = I.$

Das heißt, wir suchen eine Funktion, die mit ihrer zweiten Ableitung übereinstimmt. Naheliegend wäre der Ansatz I(t) = C e^t mit einer zunächst beliebigen Konstanten C. Wir dürfen aber nicht die Anfangsbedingungen vergessen, die wir oben hergeleitet hatten: $I(0) = \pi$, $\dot{I}(0) = -\pi$. Mit dem Ansatz $I(t) = C\,e^t$ wäre $\dot{I}(t) = C\,e^t = I(t)$, also automatisch $I(0) = \dot{I}(0)$, und damit sind die Anfangsbedingungen nicht beide gleichzeitig erfüllbar. Es gibt aber zum Glück noch eine zweite Art von Funktionen, für die $\ddot{I} = I$ gilt, nämlich $I(t) = C\,e^{-t}$. Für diesen Ansatz erhalten wir $\dot{I}(t) = -C\,e^{-t}$, also $I(0) = C$ und $\dot{I}(0) = -C$. Wählen wir nun einfach C = π, dann sind beide Anfangsbedingungen erfüllt!

Letztlich haben wir also das Ergebnis:

$$I(t) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(tx)}{x^2+1}\,dx = \pi\,e^{-t} = \frac{\pi}{e^t},$$

und damit folgt für das gesuchte Integral I(1):

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\cos(x)}{x^2+1}\,dx = \frac{\pi}{e}.$$

Anmerkung: Ähnlich, aber nochmals deutlich komplizierter, kann man z. B. auch zeigen:

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2(x)}{x^2(x^2+1)}\,dx = \frac{\pi}{4}\left(1+\frac{1}{e^2}\right).$$