Typische Fallunterscheidungen bei ganzrationalen Funktionenscharen

Bestimme zunächst alle Nullstellen (***Satz vom Nullprodukt!***). Untersuche dann

a) ob einige der Nullstellen für manche Fälle evtl. gleich sind; diese Fälle jeweils einzeln angeben, am Schluss dann noch einen Fall „sonst" (wenn also keine der Nullstellen gleich sind)
b) ob der Parameter im Nenner eines Bruchs steht – dann muss man die beiden Fälle
   1) Nenner = 0, 2) Nenner $\neq 0$ beachten
c) ob der Parameter unter einer Wurzel steht – dann muss man die drei Fälle
   1) $D < 0$, 2) $D = 0$, 3) $D > 0$ beachten

Für jeden Fall müssen die Vielfachheiten getrennt untersucht werden, und der Wert des Parameters muss angegeben / berechnet werden!

Beispiel 1: $f_k(x) = x\,(x + k)\,(x - k - 1)$; $k \in \mathbb{R}$
$x\,(x + k)\,(x - k - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -k$; $x_3 = k + 1$

a) einige der Nullstellen können gleich sein! (evtl. NR machen: $x_1 = x_2 \Rightarrow 0 = -k \Rightarrow k = 0$; $x_1 = x_3 \Rightarrow 0 = k + 1 \Rightarrow k = -1$; $x_2 = x_3 \Rightarrow -k = k + 1 \Rightarrow k = -0{,}5$)
   1) $k = 0$: $x_1 = x_2 = 0$ (doppelt); $x_3 = 1$ (einfach)
   2) $k = -1$: $x_1 = x_3 = 0$ (doppelt); $x_2 = 1$ (einfach)
   3) $k = -0{,}5$: $x_1 = 0$ (einfach); $x_2 = x_3 = 0{,}5$ (doppelt)
   4) sonst (also $k \neq 0$ und $\neq -1$ und $\neq -0{,}5$): $x_1 = 0$; $x_2 = -k$; $x_3 = k + 1$ (alle einfach)
b) kein k unter einer Wurzel – nichts zu tun!
c) kein k im Nenner eines Bruchs – nichts zu tun!

Beispiel 2: $f_a(x) = x\,(x - 1)\,(a\,x - 1)$; $a \in \mathbb{R}$
$x\,(x - 1)\,(a\,x - 1) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = \frac{1}{a}$

a) Nullstellen können gleich sein, nämlich $x_2 = x_3 \Rightarrow a = 1$: $x_1 = 0$ (einfach); $x_{2,3} = 1$ (doppelt)
b) a im Nenner eines Bruchs, also zwei Fälle!
   1) Nenner = 0 $\Rightarrow a = 0$: $x_1 = 0$; $x_2 = 1$ (beide einfach) *x_3 existiert hier nicht!*
   2) Nenner $\neq 0 \Rightarrow a \neq 0$ (und $\neq 1$, s.o.): $x_1 = 0$; $x_2 = 1$; $x_3 = \frac{1}{a}$ (alle einfach)
c) kein a unter einer Wurzel – nichts zu tun!

Beispiel 3: $f_t(x) = x\,(x + 2)\,(x^2 + t)$; $t \in \mathbb{R}$
$x\,(x + 2)\,(x^2 + t) = 0 \Rightarrow x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{-t}$

a) Nullstellen können gleich sein, nämlich $x_1 = x_2 = x_{3,4} = 0$ (das wird aber in Fall (b) schon erledigt) oder $x_2 = x_4 \Rightarrow t = -4$: $x_1 = 0$ (einfach); $x_{2,4} = -2$ (doppelt); $x_3 = +2$ (einfach)
b) unter der Wurzel steht ein a, also drei Fälle! $D = -t$
   1) $-t < 0 \Rightarrow t > 0$: keine Nullstellen *$x_{3,4}$ existieren hier nicht!*
   2) $-t = 0 \Rightarrow t = 0$: $x_{1,3,4} = 0$ (dreifach); $x_2 = -2$ (einfach)
   3) $-t > 0 \Rightarrow t < 0$ (und $\neq -4$, s.o.): $x_1 = 0$; $x_2 = -2$; $x_{3,4} = \pm\sqrt{-t}$ (alle einfach)
c) kein t im Nenner eines Bruchs – nichts zu tun!