Übungen zu / Anwendungen von Differenzialgleichungen

1.0 Für $y = C \cdot e^x$ gilt bekanntlich $y' = y$, für $y = C \cdot e^{-x}$ gilt $y' \neq y$, aber $y'' = y$; für $y = \cos(x)$ und $y = \sin(x)$ gilt $y' \neq y, y'' \neq y, y''' \neq y$, aber $y'''' = y$. Es liegt nahe, noch den fehlenden Fall $y' \neq y, y'' \neq y$, aber $y''' = y$ zu untersuchen.

1.1 Zeigen Sie, dass $y(x) = C \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-x/2}$ und $y(x) = C \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-x/2}$ jeweils für alle $C \in \mathbb{R}$ Lösungen dieser Differenzialgleichung sind.

1.2 Ermitteln Sie für die erste Möglichkeit die spezielle Lösung mit y(0) = 1.

2 Sind an einer chemischen Reaktion jeweils n Edukt-Teilchen beteiligt, dann spricht man von einer Reaktion der Ordnung n, und für den Zusammenhang zwischen Reaktionsgeschwindigkeit und Konzentration des Edukts gilt dann: $v = -\dot{c} = k \cdot c^n$ (mit $k > 0$)

Ermitteln Sie den zeitlichen Verlauf der Reaktion; die Konzentration zur Zeit $t = 0$ sei dabei c_0.

(*Tipp:* Unterscheiden Sie die Fälle $k = 1$ und $k > 1$.)

3.0 Laut Stephen Hawking haben schwarze Löcher eine Temperatur T,

$$T = \frac{hc^3}{16\pi^2 k_B G M}$$

mit der Planck-Konstante h, der Lichtgeschwindigkeit c, der Boltzmann-Konstante k_B, der Gravitationskonstante G und der Masse M des schwarzen Lochs und geben deshalb Strahlung ab (Hawking-Strahlung). Laut dem Stefan-Boltzmann-Gesetz gilt für die Strahlungsleistung P

$$P = \frac{8\pi^6 k_B^4}{15h^3c^2} R^2 T^4$$

mit dem Radius R des schwarzen Lochs, und für diesen Radius gilt laut Karl Schwarzschild wiederum $R = \frac{2GM}{c^2}$. Diese abgegebene Strahlung sorgt für eine Abnahme der Energie des schwarzen Lochs, $P = -\dot{E}$, und da nach Einstein bekanntlich $E = Mc^2$ gilt, nimmt dadurch auch die Masse des schwarzen Lochs ab, $\dot{M} = -\frac{P}{c^2}$.

3.1 Zeigen Sie, dass insgesamt die Differenzialgleichung $\dot{M} = -\frac{hc^4}{30720\pi^2 G^2} M^{-2}$ folgt.

3.2 Zeigen Sie, dass sich für die Anfangsbedingung $M(0) = M_0$ folgt

$$M(t) = \sqrt[3]{-\frac{hc^4}{10240\pi^2 G^2} t + M_0^3}.$$

3.3 Berechnen Sie für ein schwarzes Loch der Anfangsmasse $M_0 = 10^{31} kg$ (das ist fünfmal die Masse unserer Sonne), wann es komplett „verdampft‘‘ist (also M = 0 ist).

4 Der sogenannte Hubble-Parameter H beschreibt die Ausdehnung des Universums. (Genauer gilt für Galaxien im Abstand d von uns, dass sie sich mit der Geschwindigkeit v = H·d von uns entfernen.) H ändert sich mit der Zeit sowohl wegen der Gravitation der Massen im Universum als auch wegen der sogenannten dunklen Energie. Insgesamt gilt folgende Differenzialgleichung:

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}\left(H^2 - \frac{8\pi G\Lambda}{3}\right)$$

mit der Gravitationskonstante G und der sogenannten kosmologischen Konstante Λ, welche die Dichte der dunklen Energie angibt. Zur Vereinfachung kürzen wir den zweiten Term ab:

$$\dot{H} = -\frac{3}{2}(H^2 - k^2).$$

Lösen Sie diese Differenzialgleichung unter der Bedingung, dass $\lim_{t\to 0} H(t) = \infty$ gilt, d. h. am Anfang verlief die Ausdehnung des Universums unendlich schnell („Urknall‘‘).

5.0 Fällt ein Körper der Masse m im Gravitationsfeld der Erde, so gilt für große Abstände r zum Mittelpunkt der Erde das Gravitationsgesetz F = $-G\frac{m\,m_E}{r^2}$ mit der Gravitationskonstante G und der Erdmasse m_E. Andererseits ist F = ma = m$\ddot{r}$, also folgt die Differenzialgleichung 2. Ordnung

$$m\ddot{r} = -G\frac{m\,m_E}{r^2}.$$

Daraus kann man mit einem Standardtrick eine Differenzialgleichung 1. Ordnung machen: Beide Seiten mit $\dot{r}$ multiplizieren,

$$m\,\dot{r}\,\ddot{r} = -G\frac{m\,m_E}{r^2}\dot{r}$$

und dann beide Seiten mithilfe der Kettenregel jeweils als zeitliche Ableitungen schreiben,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\,\dot{r}^2\right) = \frac{d}{dt}\left(G\frac{m\,m_E}{r}\right).$$

Nach Integrieren folgt also

$$\frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 = G\frac{m\,m_E}{r} + C \quad \text{bzw.} \quad \frac{1}{2}m\,\dot{r}^2 - G\frac{m\,m_E}{r} = C. \quad (*)$$

Der erste Summand ist nun die kinetische Energie $\frac{1}{2}m\,v^2$, der zweite ist die potenzielle Energie im Gravitationsfeld. Insgesamt drückt die Gleichung schlicht die Energieerhaltung aus,

$$E_{kin} + E_{pot} = E_{gesamt} = konstant.$$

5.1 Betrachten Sie nun den Spezialfall, dass die gesamte Energie gleich 0 ist, also auch C = 0. Außerdem fassen Sie die physikalischen Konstanten in (*) zusammen zu einem Faktor b. Dann erhalten Sie die Differenzialgleichung 1. Ordnung

$$\dot{r} = \pm\frac{b}{\sqrt{r}}$$

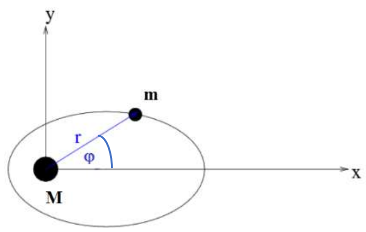
mit r, t > 0. Da ein Körper betrachtet wird, der fällt, muss $\dot{r} < 0$ sein, also benötigen Sie das Minuszeichen in dieser Differenzialgleichung. Ermitteln Sie dafür die allgemeine Lösung.

5.2 Ermitteln Sie aus der Differenzialgleichung (*) für die Anfangsbedingungen r(0) = r_0, v(0) = 0 die Zeit t_c, die es dauert, bis der Körper bei r = 0 angekommen ist („Kollisionszeit''). Tipps: Berechnen Sie zunächst den Wert von C. Die Substitution $z = \sqrt{\frac{r r_0}{r_0 - r}}$ ist dann hilfreich.

6 Wie in Aufgabe 4 betrachten wir eine Bewegung im Gravitationsfeld, aber diesmal nicht einfach einen Körper, der fällt, sondern einen Körper der Masse m, der sich um einen anderen mit der deutlich schwereren Masse M herum bewegt, z. B. der Mond oder ein Satellit um die Erde, oder die Erde oder ein anderer Planet oder Asteroid oder Komet um die Sonne usw. Für die gesamte Energie gilt dann

$$\frac{1}{2} m\, \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{m\,M}{r} = E$$

mit dem Drehimpuls (bzw. eigentlich dessen Betrag) $L = mr^2\omega = mr^2\frac{d\varphi}{dt}$, wobei r der momentane Abstand zum Zentralkörper ist und φ der momentane Winkel zur x-Achse:



(Die Herleitung der obigen Differenzialgleichung erfordert viel Rumgerechne mit Skalar- und Vektorprodukt, siehe Schluss der Lösung.)

6.1 Diese Differenzialgleichung ist nicht direkt lösbar, man kann also nicht direkt angeben, wie sich der Körper in Abhängigkeit von der Zeit auf der Bahn bewegt. Aber man kann zumindest die Form der Bahn berechnen. Zeigen Sie dafür zunächst mittels der Kettenregel, dass $\frac{d}{dt} r\big(\varphi(t)\big) = \frac{dr}{d\varphi} \cdot \frac{L}{mr^2}$ ist und damit, dass aus der obigen Differenzialgleichung folgende Differenzialgleichung für $r(\varphi)$ erhält:

$$\frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{m\,M}{r} = E.$$

6.2 Zeigen Sie dann, dass sich nach Trennung der Variablen und Einführung der Abkürzung $p := \frac{L^2}{Gm^2M}$ folgende Gleichung ergibt:

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{\dfrac{2mE}{L^2} - \dfrac{1}{r^2} + \dfrac{2}{p\,r}}} = d\varphi$$

6.3 Zeigen Sie anschließend, dass man mittels der Substitution $r = \frac{p}{u}$ und der weiteren Abkürzung

$\varepsilon^2 = \frac{2mEp^2}{L^2} + 1$ auf folgende Gleichung kommt:

$$\frac{-\,du}{\sqrt{\varepsilon^2 - (u-1)^2}} = \ d\varphi$$

6.4 Beide Seiten können nun integriert werden, wenn man links die weitere Substitution $u = \varepsilon \cos z + 1$ verwendet. Zeigen Sie, dass sich nach Integration und den beiden Resubstitutionen schließlich ergibt:

$$r = \frac{p}{\varepsilon \cos(\varphi + C) + 1}.$$

Dies beschreibt nun die möglichen Bahnen: Für $\varepsilon = 0$ hat man einfach $r = p$, der Abstand ist also konstant, d. h. es ergibt sich eine Kreisbahn. Alle anderen Fälle sind nicht so offensichtlich: Für $0 < \varepsilon < 1$ hat man eine Ellipse, für $\varepsilon = 1$ eine Parabel, für $\varepsilon > 1$ eine Hyperbel. Neben der einfachen Fallbewegung in einer geraden Linie (Aufgabe 4) hat man damit alle möglichen Bahnen im Gravitationsfeld gefunden.

7 Betrachtet man kugelsymmetrische Wellenfunktionen ψ in einem kugelsymmetrischen Potenzial V, so kann man die Schrödinger-Gleichung in der folgenden Form schreiben:

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\big(r \cdot \psi(r)\big) + V(r)\,\psi(r) = E\,\psi(r),$$

wobei $\hbar = \frac{h}{2\pi}$ ist, m die Masse des Elektrons, r der Abstand des Elektrons zum Zentrum und E die Energie. Insbesondere (a) in einem kugelsymmetrischen Potenzialtopf mit Radius R und unendlich hohen Wänden hätte man $V(r) = \begin{cases} 0 & r \leq R \\ \infty & r > R \end{cases}$, (b) beim Wasserstoffatom hätte man $V(r) = -\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$ mit der Elektronenladung q_e und der Dielektrizitätskonstante ε_0.

Ignorieren wir die ganzen physikalischen Konstanten bzw. fassen wir sie in Abkürzungen zusammen, so können wir dies Schrödinger-Gleichung einfacher schreiben als

(a) $-\frac{1}{x}\big(x \cdot \psi(x)\big)'' = \varepsilon \cdot \psi(x)$ (für $r \leq R$) bzw. (b) $-\frac{1}{x}\big(x \cdot \psi(x)\big)'' - \frac{k}{x}\psi(x) = \varepsilon \cdot \psi(x)$.

Zeigen Sie, dass (a) die Funktionen $\psi_n(x) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right)}{x}$ mit $n \in \mathbb{N}^*$ die Differenzialgleichung lösen, wenn $\varepsilon = \frac{n^2\pi^2}{R^2}$ ist, und außerdem auch die Randbedingung erfüllen, bzw. (b) die Funktion $\psi(x) = e^{-\frac{kx}{2}}$ die Differenzialgleichung löst, wenn $\varepsilon = -\frac{k^2}{4}$ ist.

Anmerkungen:

1) Wer sich fragt, warum in der Schrödinger-Gleichung die Ableitung nun so kompliziert aussieht (statt einfach nur dem gewohnten $\psi''(x)$): Das liegt erstens daran, dass wir hier dreidimensionale Probleme

betrachten, die Wellenfunktion also von allen drei Ortskoordinaten x, y, z abhängt und deshalb $\frac{d^2}{dx^2}\psi(x,y,z) + \frac{d^2}{dy^2}\psi(x,y,z) + \frac{d^2}{dz^2}\psi(x,y,z)$ nötig ist (warum eine Summe? weil dieser Term für die kinetische Energie steht, und für die gesamte kinetische Energie addiert man ja alle kinetischen Energien in alle drei Raumrichtungen), und zweitens daran, dass wir hier die Abhängigkeit der Wellenfunktion vom Radius r betrachten, der ja seinerseits über $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ von x, y, z abhängt. Für jede Ableitung der Wellenfunktion $\psi(r)$ nach einer dieser drei Koordinaten muss man also die Kettenregel verwenden, bei der zweiten Ableitung ist dann auch noch die Produktregel nötig. Wer will, kann ja mal versuchen zu zeigen, dass sich dann ergibt

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi(r(x,y,z)) + \frac{d^2}{dy^2}\psi(r(x,y,z)) + \frac{d^2}{dz^2}\psi(r(x,y,z)) = \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi(r)}{dr}.$$

(Tipp: Es ist hilfreich, als Nebenrechnung erst mal $\frac{dr}{dx}, \frac{dr}{dy}$ und $\frac{dr}{dz}$ zu berechnen.) Mittels der Produktregel kann man dann zeigen, dass man dies, so wie oben behauptet, kürzer schreiben kann,

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\big(r \cdot \psi(r)\big) = \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi(r)}{dr}$$

2) Die Wellenfunktionen in (a) beschreiben für jeweils unterschiedliche Werte von $n \in \mathbb{N}^*$ *alle* kugelsymmetrischen Lösungen; die Lösung in (b) beschreibt nur den niedrigsten Energiezustand, also das 1s-Orbital; für höhere (kugelsymmetrische) Energiezustände, also höhere s-Orbitale, muss man in (b) in der Exponentialfunktion noch den Exponenten abändern und sie außerdem mit geeigneten Polynomen, sogenannten „zugeordneten Laguerre-Polynomen", multiplizieren:

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\,j!\,(j+1)!} x^j \quad \text{mit } n \in \mathbb{N}^*$$

Wer eine ***wirklich*** große Herausforderung sucht, der kann ja mal versuchen, zu zeigen, dass diese Funktionen tatsächlich alle die Schrödinger-Gleichung lösen, jeweils mit $\varepsilon_n = -\frac{k^2}{4n^2}$.

1.1 $y'(x) = C \cdot \left[-\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2}\right]$

$$y''(x) = C \cdot \left[-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2} - \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2} + \right.$$
$$\left. + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2}\right]$$
$$= C \cdot \left[-\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}}\right]$$
$$y'''(x) = C \cdot \left[\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} - \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2} + \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} + \right.$$
$$\left. + \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot e^{-\frac{x}{2}} \cdot \frac{-1}{2}\right]$$

$= C \cdot \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}} = y(x)$; die Rechnung für $y(x) = C \cdot \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-x/2}$ läuft genauso

1.2 $y(0) = C \cdot \cos(0) \cdot e^0 = C$; $y(0) = 1$ ➔ $C = 1$ ➔ $y(x) = \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \cdot e^{-\frac{x}{2}}$

2 Der Fall $n = 1$ entspricht genau dem radioaktiven Zerfall (nur wird eben statt der Anzahl N hier die Konzentration c betrachtet), die Lösung ist also schon bekannt: $c(t) = c_0 \cdot e^{-kt}$, die Konzentration des Edukts nimmt also bei einer Reaktion erster Ordnung exponentiell ab.

Für $n > 1$ führt Trennung der Variablen erst mal auf

$$c^{-n}dc = -k \cdot dt,$$

und Integration ergibt dann

$$\frac{c^{-n+1}}{-n+1} = -k \cdot t + C;$$

wegen dem $-n + 1$ muss man eben den Fall $n = 1$ extra betrachten!

Die Anfangsbedingung $c(0) = c_0$ führt auf

$$\frac{c_0^{-n+1}}{-n+1} = C.$$

Nun muss man noch nach c auflösen; am Ende kann man schreiben:

$$c(t) = \left((n-1) \cdot k \cdot t + c_0^{1-n}\right)^{1/(1-n)}$$

Wegen $n > 1$ ist der Exponent immer negativ, es ergeben sich also Hyperbeln.

3.1 Zunächst folgt aus $\dot{M} = -\frac{P}{c^2}$ und $P = \frac{8\pi^6 k_B^4}{15\ ^3c^2} R^2 T^4$, dass

$$\dot{M} = -\frac{8\pi^6 k_B^4}{15h^3c^4} R^2 T^4$$

ist. Darin setzen wir nun $R = \frac{2GM}{c^2}$ und $T = \frac{hc^3}{16\ ^2k_B GM}$ ein,

$$\dot{M} = -\frac{8\pi^6 k_B^4}{15h^3c^4} \left(\frac{2GM}{c^2}\right)^2 \left(\frac{hc^3}{16\pi^2 k_B GM}\right)^4,$$

lösen die Klammern auf,

$$\dot{M} = -\frac{8\pi^6 k_B^4}{15h^3c^4}\frac{4G^2M^2}{c^4}\frac{h^4\,c^{12}}{16^4\pi^8k_B^4G^4\,M^4}$$

und nach Kürzen bleibt schließlich das behauptete Ergebnis

$$\dot{M} = -\frac{hc^4}{30720\pi^2G^2}M^{-2}$$

3.2 Trennung der Variablen führt auf

$$M^2dM = -\frac{hc^4}{30720\pi^2G^2}dt$$

und Integrieren dann auf

$$\frac{1}{3}M^3 = -\frac{hc^4}{30720\pi^2G^2}t + C,$$

also

$$M^3 = -\frac{hc^4}{10240\pi^2G^2}t + 3C.$$

Anfangsbedingung einsetzen:

$$M_0^3 = -\frac{hc^4}{10240\pi^2G^2}\cdot 0 + 3C,$$

also folgt $3C = M_0^3$ und damit schließlich das behauptete Ergebnis

$$M(t) = \sqrt[3]{-\frac{hc^4}{10240\pi^2G^2}t + M_0^3}.$$

3.3 $M = 0$ einsetzen: $0 = \sqrt[3]{-\frac{hc^4}{10240\ \ ^2G^2}t + M_0^3}$

auflösen nach t:

$$t = \frac{10240\pi^2G^2M_0^3}{hc^4}$$

Zahlenwerte einsetzen:

$$t \approx \frac{10240\cdot 3{,}14^2\cdot\left(6{,}67\cdot 10^{-11}\frac{m^3}{kg\,s^2}\right)^2\left(10^{31}kg\right)^3}{6{,}63\cdot 10^{-34}\,\frac{kg\,m^2}{s}\cdot\left(3{,}00\cdot 10^8\frac{m}{s}\right)^4} \approx 8{,}36\cdot 10^{76}\,s \approx 2{,}65\cdot 10^{69}\text{ Jahre}$$

4 $\dot{H} = -\frac{3}{2}(H^2 - k^2)$

$H^2 - k^2 = 0$ ➔ $H = \pm k$: Widerspruch zur Anfangsbedingung, also keine Lösung

$H \neq \pm k$: $-\frac{\dot{H}}{H^2-k^2} = \frac{3}{2}$ ➔ $\frac{dH}{k^2-H^2} = \frac{3}{2}dt$ ➔ $\int \frac{1}{k^2-H^2}dH = \int \frac{3}{2}dt$

FS: $\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ ➔ $\frac{1}{2k}\ln\left|\frac{k+H}{k-H}\right| = \frac{3}{2}t + C$ mit $C \in \mathbb{R}$

➔ $\ln\left|\frac{k+H}{k-H}\right| = 3kt + 2kC$ ➔ $\left|\frac{k+H}{k-H}\right| = e^{3kt} \cdot e^{2kC}$

➔ $\frac{k+H}{k-H} = \pm e^{2kC} \cdot e^{3kt} = D \cdot e^{3kt}$ mit $D \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$

➔ $k + H = D \cdot e^{3kt} \cdot k - D \cdot e^{3kt} \cdot H$

➔ $D \cdot e^{3kt} \cdot H + H = D \cdot e^{3kt} \cdot k - k$

➔ $(D \cdot e^{3kt} + 1) \cdot H = (D \cdot e^{3kt} - 1) \cdot k$

➔ $H(t) = \frac{D \cdot e^{3kt} - 1}{D \cdot e^{3kt} + 1} \cdot k$

$\lim_{t\to 0} H(t) = \frac{D-1}{D+1} \cdot k = \infty$ ➔ $D = -1$

➔ $H(t) = \frac{-e^{3kt}-1}{-e^{3kt}+1} \cdot k = \frac{e^{3kt}+1}{e^{3kt}-1} \cdot k$

(damit folgt dann auch: $\lim_{t\to\infty} H(t) = \lim_{t\to\infty} \frac{1+e^{-3kt}}{1-e^{-3kt}} \cdot k = \frac{1+0}{1-0} \cdot k = k$, die Konstante $k = \sqrt{\frac{8\pi G\Lambda}{3}}$ gibt also an, an welchen Wert sich H auf lange Sicht annähert)

5.1 $\dot{r} = -\frac{b}{\sqrt{r}}$ ➔ $\sqrt{r}dr = -b\,dt$ ➔ $\int r^{1/2}\,dr = \int -b\,dt$ ➔ $\frac{1}{3/2}r^{3/2} = -bt + C$

➔ $r^{3/2} = \frac{3}{2}(-bt + C)$ ➔ $r(t) = \left(\frac{3}{2}(C - bt)\right)^{2/3}$

mit $r(0) = r_0$ ➔ $r_0 = \left(\frac{3}{2}C\right)^{2/3}$ ➔ $\frac{3}{2}C = r_0^{3/2}$ ➔ $r(t) = \left(r_0^{3/2} - \frac{3}{2}bt\right)^{2/3}$

5.2 Die Gleichung (*) muss immer gelten, insbesondere für t = 0. Setzt man die Anfangsbedingungen ein, folgt: $C = -G\frac{m\,m_E}{r_0}$ und damit dann $\dot{r} = -\sqrt{2GM}\sqrt{\frac{r_0-r}{rr_0}}$ bzw. nach TdV: $\sqrt{\frac{rr_0}{r_0-r}}dr = -\sqrt{2GM}\,dt$

$z = \sqrt{\frac{rr_0}{r_0-r}}$ ➔ $z^2(r_0 - r) = rr_0$ ➔ $z^2r + r_0r = z^2r_0$ ➔ $r = \frac{z^2r_0}{z^2+r_0} = r_0 - \frac{r_0^2}{z^2+r_0}$ ➔ $dr = \frac{2zr_0^2}{(z^2+r_0)^2}dz$

➔ $\int z \cdot \frac{2zr_0^2}{(z^2+r_0)^2}dz = -\sqrt{2GM}t + D$ ➔ $\int z \cdot \left(-\frac{r_0^2}{z^2+r_0}\right)' dz = -\sqrt{2GM}t + D$

➔ $z \cdot \left(-\frac{r_0^2}{z^2+r_0}\right) + \int \frac{r_0^2}{z^2+r_0}dz = -\sqrt{2GM}t + D$

➔ $-\frac{r_0^2 z}{z^2+r_0} + \frac{r_0^2}{\sqrt{r_0}}\arctan\left(\frac{z}{\sqrt{r_0}}\right) = -\sqrt{2GM}t + D$ ➔ $-\frac{z\sqrt{r_0}}{z^2+r_0} + \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{r_0}}\right) = -\frac{\sqrt{2GM}}{r_0^{3/2}}t + D$

➔ $-\frac{\sqrt{\frac{rr_0}{r_0-r}}\sqrt{r_0}}{\frac{rr_0}{r_0-r}+r_0} + \arctan\left(\sqrt{\frac{r}{r_0-r}}\right) = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}}t + D$ ➔ $-\frac{\sqrt{\frac{r}{r_0-r}}}{\frac{r}{r_0-r}+1} + \arctan\left(\sqrt{\frac{r}{r_0-r}}\right) = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}}t + D$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{\frac{r}{r_0-r}}(r-r_0)}{r+(r_0-r)} + \arctan\left(\sqrt{\frac{r}{r_0-r}}\right) = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}}t + D$

$\Rightarrow -\frac{\sqrt{r(r_0-r)}}{r_0} + \arctan\left(\sqrt{\frac{r}{r_0-r}}\right) = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}}t + D \Rightarrow -\sqrt{\frac{r}{r_0}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)} + \arctan\left(\sqrt{\frac{r}{r_0-r}}\right) = -\sqrt{\frac{2GM}{r_0^3}}t + D$

für t → 0 folgt r→ r_0 $\Rightarrow \frac{\pi}{2} = D \Rightarrow -\sqrt{\frac{r}{r_0}\left(1-\frac{r}{r_0}\right)} + \arctan\left(\sqrt{\frac{r}{r_0-r}}\right) = -\sqrt{\frac{2G}{r_0^3}}t + \frac{\pi}{2}$

für r = 0: $0 = -\sqrt{\frac{2G}{r_0^3}}t + \frac{\pi}{2} \Rightarrow t_c = \pi\sqrt{\frac{r_0^3}{8GM}}$

6.1 Kettenregel: $\frac{d}{dt}r(\varphi(t)) = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{d\varphi}{dt}$

außerdem gilt laut Aufgabe: $L = mr^2\frac{d\varphi}{dt}$ ==> $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}$

Setzt man das oben ein, folgt sofort die Behauptung $\frac{d}{dt}r(\varphi(t)) = \frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{L}{mr^2}$. Dies ist dasselbe wie $\dot{r}$, wir können es also sofort in die gegebene Differenzialgleichung einsetzen:

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dr}{d\varphi}\cdot\frac{L}{mr^2}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{m\,M}{r} = E.$$

Nach Auflösen der Klammer und Zusammenfassen folgt dann die behauptete Differenzialgleichung

$$\frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{m\,M}{r} = E.$$

6.2 Trennung der Variablen: Zunächst isolieren wir $\frac{dr}{d\varphi}$ auf der linken Seite,

$$\frac{L^2}{2mr^4}\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = E - \frac{L^2}{2mr^2} + G\frac{m\,M}{r}$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 = \frac{2mr^4E}{L^2} - r^2 + \frac{2\,G\,m^2\,M\,r^3}{L^2}$$

$$\frac{dr}{d\varphi} = \sqrt{\frac{2mr^4E}{L^2} - r^2 + \frac{2\,G\,m^2\,M\,r^3}{L^2}}$$

(Eigentlich bräuchte man wie üblich $\pm\sqrt{\square}$, wenn man das durchrechnet, sieht man aber, dass sich durch das Minuszeichen keine anderen Bahnen ergeben.) Trennung der Variablen führt dann zunächst auf

$$\frac{dr}{\sqrt{\frac{2mr^4E}{L^2} - r^2 + \frac{2\,G\,m^2\,M\,r^3}{L^2}}} = d\varphi.$$

Vergleichen wir das mit dem gewünschten Ergebnis, so sehen wir zunächst, dass vor der Wurzel r^2 stehen soll und die Potenzen von r unter der Wurzel andere sein sollen. Das erreichen wir einfach, indem wir unter der Wurzel r^4 ausklammern und daraus dann eben die Wurzel ziehen,

$$\frac{dr}{\sqrt{r^4\left(\frac{2m}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2\,G\,m^2\,M}{L^2\,r}\right)}} = d\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{dr}{r^2\sqrt{\left(\frac{2m}{L^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{2\,G\,m^2\,M}{L^2\,r}\right)}} = d\varphi.$$

Im dritten Summanden erkennen wir nun genau den Kehrwert der gegebenen Abkürzung p, wir haben also, wie behauptet, die Gleichung

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{\left(\frac{2m}{L^2}-\frac{1}{r^2}+\frac{2}{p\,r}\right)}}=d\varphi.$$

6.3 $r=\frac{p}{u}$ führt auf $dr=-\frac{p}{u^2}$. Setzen wir beides ein und kürzen erst mal ein wenig:

$$\frac{-\frac{p}{u^2}du}{\frac{p^2}{u^2}\sqrt{\left(\frac{2mE}{L^2}-\frac{u^2}{p^2}+\frac{2u}{p^2}\right)}}=d\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{-d}{p\sqrt{\left(\frac{2mE}{L^2}-\frac{u^2}{p^2}+\frac{2u}{p^2}\right)}}=d\varphi;$$

außerdem können wir das übrige p im Nenner noch unter die Wurzel ziehen und weiter kürzen:

$$\frac{-du}{\sqrt{p^2\left(\frac{2m}{L^2}-\frac{u^2}{p^2}+\frac{2u}{p^2}\right)}}=d\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{-du}{\sqrt{\frac{2mEp^2}{L^2}-u^2+2u}}=d\varphi.$$

Unter der Wurzel steht nun ein quadratischer Term; es sollte bekannt sein, dass in solchen Fällen quadratische Ergänzung weiter hilft. (Dass man das machen sollte, legt auch das gegebene Ergebnis nahe!) Machen wir das also:

$$\frac{-du}{\sqrt{\frac{2mEp^2}{L^2}-(u^2-2u)}}=d\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{-du}{\sqrt{\frac{2mEp^2}{L^2}-(u^2-2u+1-1)}}=d\varphi$$

$$\Rightarrow\quad \frac{-du}{\sqrt{\frac{2mEp^2}{L^2}-((u-1)^2-1)}}=d\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{-du}{\sqrt{\frac{2mEp^2}{L^2}+1-(u-1)^2}}=d\varphi.$$

Mit der gegebenen Abkürzung $\varepsilon^2=\frac{2mEp^2}{L^4}+1$ folgt also tatsächlich

$$\frac{-du}{\sqrt{\varepsilon^2-(u-1)^2}}=d\varphi.$$

6.4 $u=\varepsilon\cos z+1$ führt auf $du=-\varepsilon\sin z\;dz$. Setzen wir beides ein,

$$\frac{\varepsilon\sin z\,dz}{\sqrt{\varepsilon^2-(\varepsilon\cos z)^2}}=d\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{\varepsilon\sin z\,dz}{\sqrt{\varepsilon^2-\varepsilon^2\cos^2 z}}=d\varphi.$$

Unter der Wurzel können wir nun das ε^2 ausklammern und daraus dann die Wurzel ziehen,

$$\frac{\varepsilon\sin z\,dz}{\sqrt{\varepsilon^2(1-\cos^2 z)}}=d\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{\sin z\,dz}{\varepsilon\sqrt{1-\cos^2 z}}=d\varphi.$$

Nun können wir unter der Wurzel noch den trigonometrischen Pythagoras anwenden und erhalten schließlich eine sehr einfache Gleichung,

$$\frac{\varepsilon\sin z\,dz}{\varepsilon\sqrt{\sin^2 z}}=d\varphi \quad\Rightarrow\quad \frac{\varepsilon\;\sin z\,dz}{\varepsilon\sin z}=d\varphi \quad\Rightarrow\quad dz=d\varphi.$$

Dies können wir sofort integrieren zu $z=\varphi+C$. Damit folgt

$$u=\varepsilon\cos z+1=\varepsilon\cos(\varphi+C)+1$$

und daraus wiederum das behauptete Ergebnis,

$$r=\frac{p}{u}=\frac{p}{\varepsilon\cos(\varphi+C)+1}.$$

Schließlich noch die versprochene Herleitung der in 5.0 gegebenen Differenzialgleichung. Es genügt, sich die kinetische Energie anzuschauen, die potenzielle Energie ist ja dieselbe wie in Aufgabe 4. Zunächst muss *man sich klar machen, dass man bei einer Bewegung in mehrere Richtungen die kinetischen Energien in alle drei Richtungen addieren muss,*

$$E_{kin} = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}mv_y^2 + \frac{1}{2}mv_z^2,$$

und dass man das dann kurz schreiben kann als

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\vec{v}^2.$$

Um weiterzukommen, bräuchte man Methoden aus dem Studium – oder man verwendet einen Trick, auf den man aber eben auch erst mal kommen muss… wir fügen „mal 1‘‘ ein und verwenden außerdem, dass ja der Betrag jedes Einheitsvektors gleich 1 ist. Der Einheitsvektor, der wir hier verwenden, zeigt vom Zentralkörper zum Körper auf der Bahn, also in Richtung des Vektors $\vec{r}$ („radial‘‘), deshalb nennen wir ihn $\overrightarrow{e_r}$:

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m \cdot 1 \cdot \vec{v}^2 = \frac{1}{2}m \cdot \overrightarrow{e_r}^2 \cdot \vec{v}^2.$$

Nun verwenden wir eine Formel, die man eventuell aus der 11. Klasse (noch) kennt:

$$\vec{a}^2\vec{b}^2 = \left(\vec{a} \circ \vec{b}\right)^2 + \left(\vec{a} \times \vec{b}\right)^2;$$

damit folgt hier

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m \cdot ((\overrightarrow{e_r} \circ \vec{v})^2 + (\overrightarrow{e_r} \times \vec{v})^2).$$

Der erste Summand gibt nun den Teil der Geschwindigkeit in Richtung von $\overrightarrow{e_r}$ an, also den Teil des Geschwindigkeitsvektors, der zum Zentralkörper hin oder davon weg zeigt, spricht: der erste Summand gibt an, wie schnell sich der Radius verändert, $\overrightarrow{e_r} \circ \vec{v} = \dot{r}$. Im zweiten Summanden verwenden wir zunächst $\overrightarrow{e_r} = \frac{\vec{r}}{r}$,

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{v}\right)^2\right) = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m(\vec{r}\times\vec{v})^2}{2r^2}.$$

Außerdem gilt $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (wobei $\vec{\omega}$ ein Vektor ist, dessen Betrag die momentane Winkelgeschwindigkeit ist und dessen Richtung jeweils momentan senkrecht zur Bahnebene steht) und damit

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m(\vec{r}\times(\vec{\omega}\times\vec{r}))^2}{2r^2}.$$

Dieses doppelte Kreuzprodukt muss man nun auch noch vereinfachen, was auch nochmals eine längliche Rechnerei ist. Verwendet man in der Rechnung, dass $\vec{\omega} \perp \vec{r}$ ist, vereinfacht sich allerdings einiges, und es bleibt schließlich

$$E_{kin} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{m(|\vec{\omega}|\vec{r}^2)^2}{2r^2} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mr^4\omega^2}{2r^2}.$$

Mit $L = mr^2\omega$, also $r^4\omega^2 = \left(\frac{L}{m}\right)^2$, folgt dann endlich die angegebene Differenzialgleichung.

7 (a) $-\frac{1}{x}\left(x\cdot\psi_n(x)\right)'' = -\frac{1}{x}\left(x\cdot\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right)}{x}\right)'' = -\frac{1}{x}\left(\sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right)\right)'' = -\frac{1}{x}\left(-\left(\frac{n\pi}{R}\right)^2\sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right)\right)$

$$= \left(\frac{n\pi}{R}\right)^2\frac{\sin\left(\frac{n\pi x}{R}\right)}{x} = \frac{n^2\pi^2}{R^2}\cdot\psi_n(x)$$

einsetzen in die Differenzialgleichung:

$$\frac{n^2\pi^2}{R^2}\cdot\psi_n(x) = \varepsilon\cdot\psi_n(x)$$

Daraus folgt sofort, wie behauptet, $\varepsilon = \frac{n^2\pi^2}{R^2}$.

Randbedingung: $\psi_n(R) = \frac{\sin\left(\frac{n\pi R}{R}\right)}{R} = \frac{\sin(n\pi)}{R} = 0$, weil ja $n\pi$ genau die Nullstellen der Sinusfunktion sind.

(b) $-\frac{1}{x}\left(x\cdot\psi(x)\right)'' = -\frac{1}{x}\left(x\cdot e^{-\frac{kx}{2}}\right)'' = -\frac{1}{x}\left(x'\cdot e^{-\frac{kx}{2}} + x\cdot\left(e^{-\frac{kx}{2}}\right)'\right)' = -\frac{1}{x}\left(e^{-\frac{kx}{2}} - \frac{kx}{2}\cdot e^{-\frac{kx}{2}}\right)'$

$$= -\frac{1}{x}\left(\left(1-\frac{kx}{2}\right)\cdot e^{-\frac{kx}{2}}\right)' = -\frac{1}{x}\left(\left(1-\frac{kx}{2}\right)'\cdot e^{-\frac{kx}{2}} + \left(1-\frac{kx}{2}\right)\cdot(e^{-\frac{kx}{2}})'\right)$$

$$= -\frac{1}{x}\left(-\frac{k}{2}\cdot e^{-\frac{kx}{2}} + \left(-\frac{k}{2}+\frac{k^2x}{4}\right)\cdot e^{-\frac{kx}{2}}\right) = -\frac{1}{x}\left(-k+\frac{k^2x}{4}\right)\cdot e^{-\frac{kx}{2}}$$

$$= \frac{k}{x}e^{-\frac{kx}{2}} - \frac{k^2}{4}\cdot e^{-\frac{kx}{2}} = \frac{k}{x}\cdot\psi(x) - \frac{k^2}{4}\cdot\psi(x)$$

einsetzen in die Differenzialgleichung:

$$\frac{k}{x}\cdot\psi(x) - \frac{k^2}{4}\cdot\psi(x) - \frac{k}{x}\psi(x) = \varepsilon\cdot\psi(x)$$

Daraus folgt sofort

$$-\frac{k^2}{4}\psi(x) = \varepsilon\cdot\psi(x),$$

also, wie behauptet, $\varepsilon = -\frac{k^2}{4}$.

zu Anmerkung 1:

Zunächst ist $\frac{dr}{dx} = \frac{d}{dx}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{1}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\cdot\frac{d}{dx}(x^2+y^2+z^2) = \frac{1}{2r}\cdot 2x = \frac{x}{r}$; genauso folgt $\frac{dr}{dy} = \frac{y}{r}$ und $\frac{dr}{dz} = \frac{z}{r}$.

Damit ist dann mit der Kettenregel $\frac{d}{dx}\ \psi(r(x,y,z)) = \frac{d}{dr}\ \psi(r)\cdot\frac{dr}{dx} = \frac{d}{dr}\ \psi(r)\cdot\frac{x}{r}$ und weiter mit der Produktregel und der Kettenregel

$$\frac{d^2}{dx^2}\ \psi(r(x,y,z)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\cdot\frac{x}{r}\right) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dr}\psi(r)\right)\cdot\frac{x}{r} + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\frac{d}{dx}\frac{x}{r}$$

$$= \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\cdot\frac{x}{r}\right)\cdot\frac{x}{r} + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\left(\frac{dx}{dx}\cdot\frac{1}{r} + x\cdot\frac{d}{dx}r^{-1}\right)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\right)\cdot\frac{x^2}{r^2} + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\left(\frac{1}{r} - x\cdot r^{-2}\cdot\frac{dr}{dx}\right)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\right)\cdot\frac{x^2}{r^2} + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\left(\frac{1}{r} - x\cdot r^{-2}\cdot\frac{x}{r}\right)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\right)\cdot\frac{x^2}{r^2} + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3}\right)$$

Genauso folgt

$$\frac{d^2}{dy^2}\ \psi(r(x,y,z)) = \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\right)\cdot\frac{y^2}{r^2} + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3}\right),$$

$$\frac{d^2}{dz^2}\ \psi(r(x,y,z)) = \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\right)\cdot\frac{z^2}{r^2} + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right)$$

und damit insgesamt

$$\frac{d^2}{dx^2}\psi\big(r(x,y,z)\big) + \frac{d^2}{dy^2}\psi\big(r(x,y,z)\big) + \frac{d^2}{dz^2}\psi\big(r(x,y,z)\big)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\right)\cdot\left(\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z}{r^2}\right) + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\right)\cdot\frac{x^2+y^2+z^2}{r^2} + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\left(\frac{3}{r} - \frac{x^2+y^2+z^2}{r^3}\right)$$

$$= \left(\frac{d^2}{dr^2}\psi(r)\right)\cdot\frac{r^2}{r^2} + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\left(\frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3}\right)$$

$$= \frac{d^2}{dr^2}\psi(r) + \left(\frac{d}{dr}\ \psi(r)\right)\cdot\left(\frac{3}{r} - \frac{1}{r}\right) = \frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\ \frac{d\psi(r)}{dr},$$

wie behauptet. Andererseits ist mit der Produktregel

$$\frac{d}{dr}\big(r\cdot\psi(r)\big) = 1\cdot\psi(r) + r\cdot\frac{d\psi(r)}{dr},$$

also weiter mit der Summen- und der Produktregel

$$\frac{d^2}{dr^2}\big(r\cdot\psi(r)\big) = \frac{d}{dr}\left(\psi(r) + r\cdot\frac{d\psi(r)}{dr}\right) = \frac{d\psi(r)}{dr} + 1\cdot\frac{d\psi(r)}{dr} + r\cdot\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} = 2\,\frac{d\psi(r)}{dr} + r\cdot\frac{d^2\psi(r)}{dr^2}$$

und damit schließlich tatsächlich

$$\frac{1}{r}\frac{d^2}{dr^2}\big(r\cdot\psi(r)\big) = r\cdot\frac{d^2\psi(r)}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d\psi(r)}{dr} = \frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{d^2\psi}{dy^2} + \frac{d^2\psi}{dz^2}.$$

zu Anmerkung 2:

$$\psi_n(x) = e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j+1)!} x^j$$

$$\Rightarrow x \cdot \psi_n(x) = e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j+1)!} x^{j+1}$$

Mit der Produktregel ergibt sich dann zunächst:

$$\left(x \cdot \psi_n(x)\right)' = -\frac{k}{2n} e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j+1)!} x^{j+1}$$

$$+e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j+1)!} (j+1) x^j$$

und weiter, wieder mit der Produktregel,

$$\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = \frac{k^2}{4n^2} e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j+1)!} x^{j+1}$$

$$-\frac{k}{2n} e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j+1)!} (j+1) x^j$$

$$-\frac{k}{2n} e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j+1)!} (j+1) x^j$$

$$+e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j+1)!} (j+1) j x^{j-1}$$

Vorsicht: Die letzte Summe fängt bei nun bei j = 1 an, denn für j = 0 ergibt sich ja 0.

Die zweite und die dritte Zeile sind nun identisch, die können wir zusammenfassen; außerdem können wir die Brüche kürzen mit den Faktoren (j+1) bzw. (j+1)j dahinter, indem wir ausnutzt, dass z. B. (j+1)! = (j+1) j! ist:

$$\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = \frac{k^2}{4n^2} e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j+1)!} x^{j+1}$$

$$-\frac{k}{n} e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, j!} x^j$$

$$+e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j-1)!} x^{j-1}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{x}\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = -\frac{k^2}{4n^2} e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j+1)!} x^j$$

$$+\frac{k}{n} e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, j!} x^{j-1}$$

$$-e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=1}^{n-1} \left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\, j!\, (j-1)!} x^{j-2}$$

In der ersten Zeile steht jetzt bis auf den Vorfaktor genau wieder $\psi_n(x)$, also:

$$-\frac{1}{x}\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x)$$

$$+\frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\,j!\,j!}x^{j-1} - e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=1}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\,j!\,(j-1)!}x^{j-2}$$

Die übrigen beiden Summen sollten wir noch versuchen zusammenzufassen. Es ist unschön, dass die erste Summe bei 0 anfängt, die zweite aber bei 1; letztlich wollen wir ja wieder was mit $\psi(x)$ haben, und da sollte die Summe bei 0 anfangen. In der letzten Summe kommen alle j-Werte von 1 bis n-1 vor; dieselben Summanden erhalten wir, indem wir j von 0 bis n-2 laufen lassen, dafür in der Summe dann aber überall j+1 schreiben statt j:

$$-\frac{1}{x}\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x)$$

$$+\frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\,j!\,j!}x^{j-1} - e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-2}\left(-\frac{k}{n}\right)^{j+1} \frac{n!}{(n-j-2)!\,(j+1)!\,j!}x^{j-1}$$

In der letzten Summe klammern wir dann noch einen Faktor $-\frac{k}{n}$ aus:

$$-\frac{1}{x}\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x)$$

$$+\frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\,j!\,j!}x^{j-1} + \frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-2}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-2)!\,(j+1)!\,j!}x^{j-1}$$

Die letzten beiden Summen sind jetzt sehr ähnlich, nur noch in den Brüchen stehen unterschiedliche Nenner. Den ersten Bruch können wir aber mit (j+1) erweitern, den zweiten Bruch mit (n-j-1), und dann ausnutzen, dass (j+1) j! = (j+1)! und (n-j-1) (n-j-2)! = (n-j-1)! ist:

$$-\frac{1}{x}\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x)$$

$$+\frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!\,(j+1)}{(n-j-1)!\,(j+1)!\,j!}x^{j-1} + \frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-2}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!\,(n-j-1)}{(n-j-1)!\,(j+1)!\,j!}x^{j-1}$$

Außerdem geht die erste Summe bis j = n-1 (wie sie ja auch soll, wenn wir wieder $\psi(x)$ haben wollen), die zweite Summe aber nur bis j = n-2. Das macht aber nichts: Den Summanden mit j = n-1 können wir problemlos addieren, weil wir für j = n-1 im Zähler dann (n-(n-1)-1) = 0 stehen haben, dieser Summand ist also einfach 0 – und Null können wir ja einfach addieren, ohne irgendwas zu ändern! Also ist

$$-\frac{1}{x}\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x)$$

$$+\frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!\,(j+1)}{(n-j-1)!\,(j+1)!\,j!}x^{j-1} + \frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!\,(n-j-1)}{(n-j-1)!\,(j+1)!\,j!}x^{j-1}$$

Jetzt können wir die beiden Summen zu einer zusammenfassen:

$$-\frac{1}{x}\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x)$$

$$+\frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \left(\frac{n!\,(j+1)}{(n-j-1)!\,(j+1)!\,j!} + \frac{n!\,(n-j-1)}{(n-j-1)!\,(j+1)!\,j!}\right)x^{j-1}$$

$$= -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x) + \frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!\,(j+1) + n!\,(n-j-1)}{(n-j-1)!\,(j+1)!\,j!}x^{j-1}$$

$$= -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x) + \frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!\,((j+1) + (n-j-1))}{(n-j-1)!\,(j+1)!\,j!}x^{j-1}$$

$$= -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x) + \frac{k}{n}e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n! \cdot n}{(n-j-1)!\,(j+1)!\,j!}x^{j-1}$$

Das nun übrige n im Zähler können wir mit dem $\frac{k}{n}$ vor der Summe kürzen, außerdem schreiben wir $x^{j-1} = \frac{1}{x}x^j$ und ziehen das $\frac{1}{x}$ vor die Summe:

$$-\frac{1}{x}\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x) + \frac{k}{x}\, e^{-\frac{kx}{2n}} \cdot \sum_{j=0}^{n-1}\left(-\frac{k}{n}\right)^j \frac{n!}{(n-j-1)!\,(j+1)!\,j!}x^j$$

Damit ist das Ziel erreicht – wir haben wieder $\psi_n(x)$ selbst gefunden! Es bleibt letztlich nur übrig:

$$-\frac{1}{x}\left(x \cdot \psi_n(x)\right)'' = -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x) + \frac{k}{x}\psi_n(x)$$

Wenn wir das nun in die Schrödinger-Gleichung einsetzen, ergibt sich

$$= -\frac{k^2}{4n^2}\psi_n(x) + \frac{k}{x}\psi_n(x) - \frac{k}{x}\psi_n(x) = \varepsilon_n \cdot \psi_n(x),$$

also schließlich, wie behauptet, $\varepsilon_n = -\frac{k^2}{4n^2}$.