Berechnung der Tangentensteigung

Ziel: m_t bestimmen, ohne die Tangente zu zeichnen, also ohne einen zweiten Punkt auf der Tangente zu kennen

Rückt der Punkt B immer näher an den Punkt A heran, so ähnelt die Sekante durch A und B immer mehr der Tangente in A.

Die Tangentensteigung ist der   der Sekantensteigung!

Steigung einer Sekante durch $A(x_0|f(x_0))$ und $B(x|f(x))$:

$$m_s = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \underline{\qquad\qquad} = \frac{\Delta f}{\Delta x}$$ „Differenzenquotient“

➔ Steigung der Tangente: $\boxed{m_t = \qquad \underline{\qquad\qquad}}$

Die Differenzen Δf und Δx werden dann also „unendlich klein“; man spricht von <u>Differenzialen</u> df und dx. ➔ $m_t = \frac{df}{dx}$ „Differenzialquotient“

Beispiele:

1) $f(x) = x^2$; $x_0 = 1$

$$m_t = \qquad \underline{\qquad\qquad} = \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1^2}{x - 1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+1)(x-1)}{x-1} = \lim_{x \to 1}(x+1) =$$

2) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$; $x_0 = -1$

$$m_t = \qquad \underline{\qquad\qquad} = \lim_{x \to -1} \frac{(2x^3 - x^2 + 3x - 4) - (2\cdot(-1)^3 - (-1)^2 + 3\cdot(-1) - 4)}{x+1}$$

$$= \lim_{x \to -1} \frac{2x^3 - x^2 + 3x + 6}{x+1} = \lim_{x \to -1}(2x^2 - 3x + 6) =$$

NR:

$(2x^3 - x^2 + 3x + 6) : (x + 1) =$

h-Methode:

h ist der Abstand von x zu x_0: h = x – x0 ➔ x = x_0 + h, $\lim\limits_{x\to x_0} = \lim\limits_{h\to 0}$

$$\Rightarrow \boxed{m_t = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

1) $f(x) = x^2$; $x_0 = 1$

$$m_t = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(1+h)^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1+2h+h^2-1}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2h+h^2}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \qquad\qquad =$$

2) $f(x) = 2x^3 - x^2 + 3x - 4$; $x_0 = -1$

$$m_t = \lim_{h\to 0}\frac{f(-1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{2(-1+h)^3-(-1+h)^2+3(-1+h)-4-(-10)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2(-1+3h-3h^2+h^3-(1-2h+h^2)+3(-1+h)+6}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{-2+6h-6h^2+2h^3-1+2h-\quad{}^2-3+3h+6}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2h^3-7h^2+11h}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\qquad\qquad\qquad}{h} = \lim_{h\to 0} \qquad\qquad\qquad\qquad =$$

Die Tangentensteigung an der Stelle x_0 nennt man die <u>Ableitung</u> der Funktion f bei x_0 und schreibt dafür f ’(x_0) („f Strich von x Null“), also:

$$\boxed{m_t = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \frac{df}{dx} = \text{lokale Änderungsrate}} \quad \textit{(FS)}$$

Beachte: Für die Ableitung (= momentane Änderungsrate) einer Funktion s(t), die von der Zeit t abhängt, schreibt man stattdessen meist $\dot{s}(t_0)$ („s Punkt von t Null“) bzw. $\frac{ds}{dt}$.