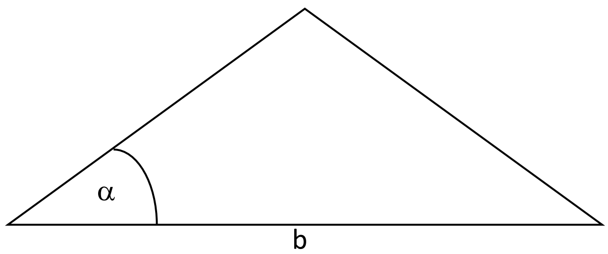
Anwendungen von Wurzelfunktionen

1. Der symmetrische Giebel eines Hauses habe die Breite b und den Neigungswinkel α (siehe Skizze) mit $0 < \alpha < 90°$. Zeigen Sie, dass Regenwasser die Zeit

$$t(\alpha) = \sqrt{\frac{2b}{g \cdot \sin(2\alpha)}}$$

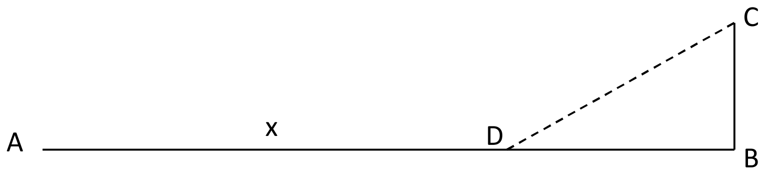
braucht, um vom Dachfirst nach unten zu fließen (dabei ist g die Erdbeschleunigung; Reibung wird vernachlässigt), und ermitteln Sie, für welchen Winkel α diese Zeit minimal ist.



2. Ein Wanderer, der von A nach C unterwegs ist (siehe Skizze), nimmt zuerst den geraden Weg von A nach B, auf dem er mit einer Geschwindigkeit von 5 km/h vorwärts kommt. Nachdem er die Strecke x zurückgelegt hat, beschließt er, den Knick im Weg (bei B) schräg durchs Gelände abzukürzen (gestrichelt); dort kommt er aber nur noch mit 4 km/h vorwärts. Zeigen Sie für $\overline{AB} = 5$ km und $\overline{BC} = 1$ km, dass er insgesamt die Zeit (in Stunden)

$$t(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{x^2 - 10x + 26}}{4}$$

braucht, und ermitteln Sie, für welchen Wert von x diese Zeit minimal ist. (Einheiten können in der Rechnung ignoriert werden)

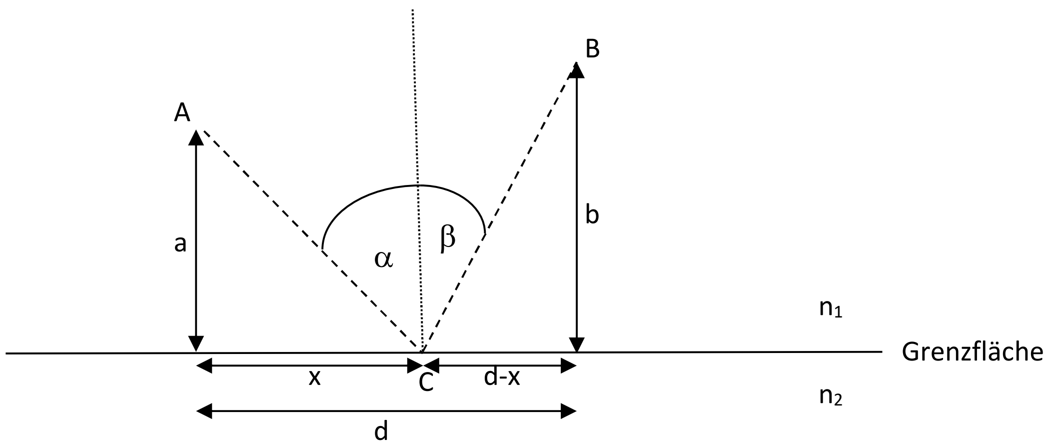


3. Licht breitet sich in durchsichtigen Medien langsamer aus als im Vakuum; dies wird durch den sogenannten Brechungsindex ausgedrückt:

$$n = \frac{c_{\text{Vakuum}}}{c_{\text{Medium}}}.$$

Außerdem gilt für die Lichtausbreitung das Fermat'sche Prinzip (nach Pierre de Fermat, französischer Mathematiker und Jurist, 1607-1665): Licht nimmt stets den Weg, auf dem es die extremale (also kleinste oder größte) Zeit braucht.

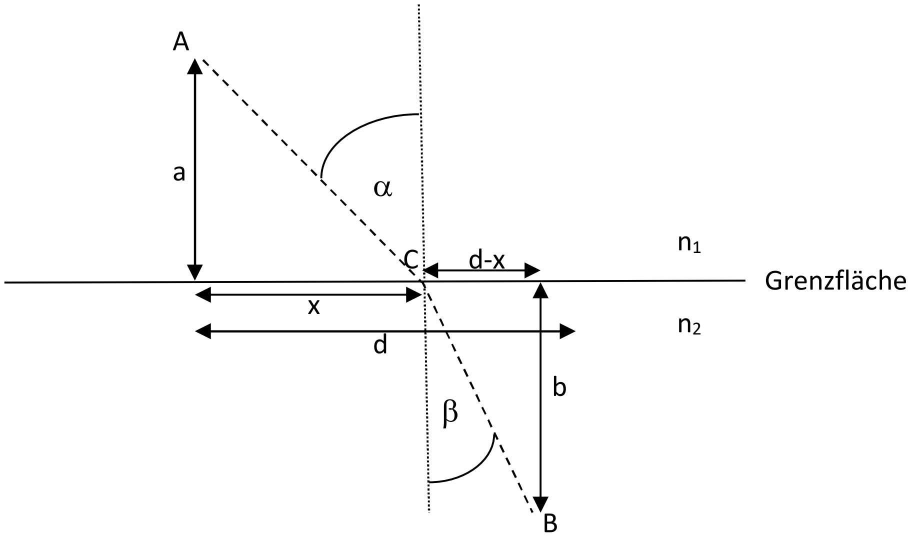
a) Wenn Licht (gestrichelt) auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien trifft (Brechzahlen n_1 und n_2, also Lichtgeschwindigkeiten $c_1 = c_{\text{Vakuum}}/n_1$ und $c_2 = c_{\text{Vakuum}}/n_2$), wird ein Teil reflektiert (siehe Skizze). Zeigen Sie das Reflexionsgesetz: Einfallswinkel = Ausfallswinkel, also $\alpha = \beta$. (Anleitung: Ermitteln Sie zunächst die Lichtlaufzeit in Abhängigkeit von x, schreiben Sie dann die Bedingung dafür hin, dass diese Laufzeit extremal wird, und drücken Sie diese Bedingung schließlich mithilfe der Winkel aus.)



b) Wenn Licht (gestrichelt) auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien trifft (Brechzahlen n_1 und n_2, also Lichtgeschwindigkeiten $c_1 = c_{\text{Vakuum}}/n_1$ und $c_2 = c_{\text{Vakuum}}/n_2$), wird ein Teil gebrochen (siehe Skizze). Zeigen Sie das Brechungsgesetz:

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c_1}{c_2} = \frac{n_2}{n_1}$$

(Hinweis: Die Rechnungen verlaufen fast genauso wie in Teil a.)



4. a) Zeigen Sie, dass die Tangente an den Graphen der Funktion f mit $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$ an der Stelle $x_0 = 1$ gegeben ist durch $y = \frac{1}{2}x + 1$. Warum kann man also sagen, dass für kleine Werte von x

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{2}x + 1$$

gilt?

b) Wenn die Geschwindigkeit v sehr klein ist im Vergleich zur Lichtgeschwindigkeit c (Physiker schreiben dafür v << c), dann ist $\frac{v}{c}$ sicher eine kleine Zahl, also ist $\frac{v^2}{c^2}$ dann sicher eine noch kleinere Zahl. Man kann also in der Näherung aus (a) für das x nun $\frac{v^2}{c^2}$ einsetzen. Zeigen Sie damit, dass

$$E_{kin} = (\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{1}{2}mv^2$$

gilt.

5. Bewegt sich eine Lichtquelle, die Licht der Frequenz f_S abgibt, relativ zum Beobachter mit einer Geschwindigkeit vom Betrag v unter dem Winkel φ zur Blickrichtung, so misst dieser Licht der Frequenz f_E, wobei der Zusammenhang

$$f_E = f_S \cdot \frac{1-\beta\cdot\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

besteht mit $\beta = \frac{v}{c}$ (relativistischer Doppler-Effekt). Im Folgenden bezeichnen wir das Frequenzverhältnis mit g und sehen es als eine Funktion von β an mit Parameter φ:

$$g_\varphi(\beta) = \frac{f_E}{f_S} = \frac{1-\beta\cdot\cos\varphi}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad D_{g_\varphi} = [0;1[.$$

Betrachten Sie die Spezialfälle φ = 0°, φ = 90° und φ = 180°. Vereinfachen Sie, wenn möglich, jeweils den Funktionsterm. Ermitteln Sie dann jeweils das Grenzverhalten und skizzieren Sie die Graphen in ein gemeinsames Koordinatensystem. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse physikalisch.

Anwendungen der natürlichen Logarithmusfunktion

1. Die Anzahl der Primzahlen, die kleiner oder gleich einer gegebenen natürlichen Zahl x sind, ist für große Werte von x näherungsweise gleich dem Wert der Funktion $\pi(x) = \frac{x}{\ln(x)}$.

a) Berechnen Sie jeweils die Anzahl der Primzahlen kleiner als 1 000 000 und 1 000 000 000.
b) Wie verhält sich die Funktion π für $x \to \infty$? Was folgt daraus?
c) Was gibt die Funktion π(x)/x an? Wie verhält sie sich für $x \to \infty$? Was folgt daraus?

2. Die Entropie S eines idealen Gases in Abhängigkeit seiner inneren Energie E, seines Volumens V und seiner Teilchenanzahl N ist gegeben durch

$$S(E,V,N) = k_B N \left[\ln\left(\frac{V \cdot E^{3/2}}{N^{5/2}}\right) + \frac{3}{2}\ln\left(\frac{4\pi m}{3h^2}\right) + \frac{5}{2}\right];$$

dabei ist $k_B = R/N_A$ die Boltzmann-Konstante (R: allgemeine Gaskonstante; N_A: Avogadro-Zahl), m die Masse eines Gasteilchens und h die Planck'sche Konstante. („Sackur-Tetrode-Gleichung", um 1912 unabhängig voneinander von den Physikern Otto Sackur und Hugo Tetrode entwickelt.)

a) Die absolute Temperatur T ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE},$$

wobei V und N als konstant betrachtet werden. Errechnen Sie daraus, wie E von N und T abhängt.

b) Der Druck p ist gegeben durch die Gleichung

$$\frac{p}{T} = \frac{dS}{dV},$$

wobei E und N als konstant betrachtet werden. Errechnen Sie daraus, wie p von V, N und T abhängt.

3. Eine Rakete (Anfangsmasse $m_0 = 600$ t) beschleunigt im Vakuum, indem sie 4 t Treibstoff pro Sekunde mit einer Geschwindigkeit von $v_T = 2500$ m/s nach hinten ausstößt. Nach der Zeit t (in s) hat sie dann die Geschwindigkeit v (in m/s) erreicht, wobei gilt (Raketengleichung, Ziolkowski 1903):

$$v(t) = v_T \cdot ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) = 2500 \cdot ln\left(\frac{600}{600-4 \cdot t}\right), \quad t \geq 0$$

Runden Sie Ihre Ergebnisse, wo nötig, im Folgenden auf ganze Zahlen.

a) Welche Geschwindigkeit hat die Rakete nach 50 s erreicht?
b) Berechnen Sie, wann die Rakete dieselbe Geschwindigkeit wie die Ausstoßgeschwindigkeit des Treibstoffs erreicht. Welches Verhältnis ergibt sich zu diesem Zeitpunkt für die restliche Masse der Rakete zu ihrer Anfangsmasse?
c) Welches Problem ergibt sich mit dieser Formel für t = 150 s? Interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang; kann das Problem in der Realität auch auftreten?
d) Nahe der Erde gilt für die Schwerebeschleunigung a = g; damit folgt für die Geschwindigkeit, wenn der Treibstoffmassen-Ausstoß konstant gleich μ ist,

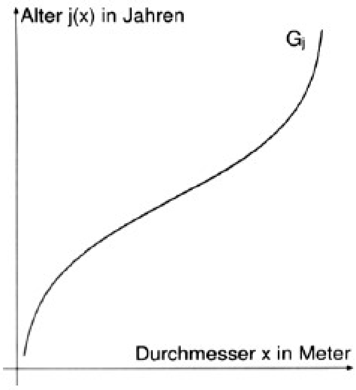
$$v(t) = v_T \cdot ln\frac{m_0}{m_0 - \mu\, t} - g\, t, \quad 0 \leq t < \frac{m_0}{\mu}.$$

Zeigen Sie: Damit die Rakete zu jeder Zeit nach oben beschleunigt, muss gelten

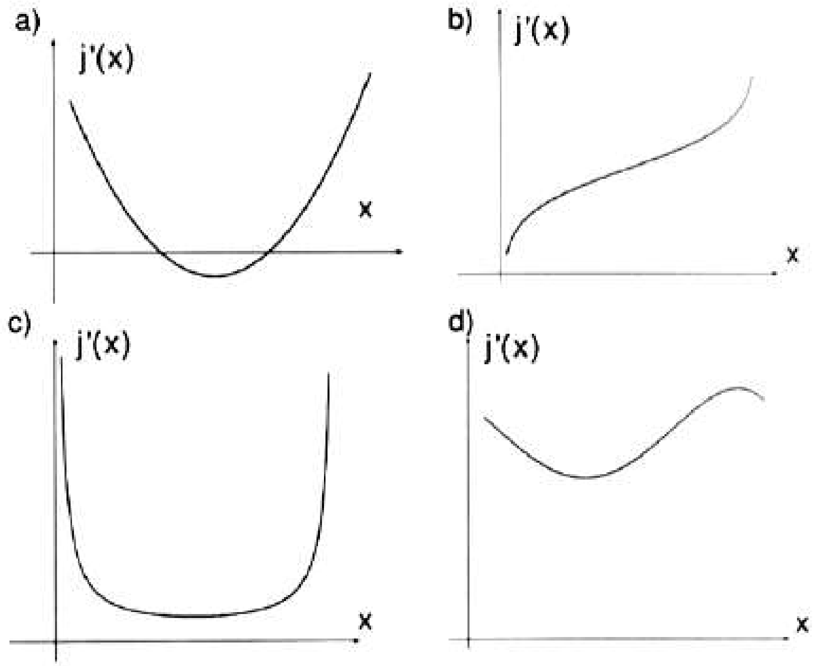
$$v_T \cdot \mu > m_0 \cdot g$$

(vgl. Abitur NT2007 und T2023)

4. Zwischen dem Alter einer Eiche in Jahren und ihrem Stammdurchmesser x in Metern besteht ein funktionaler Zusammenhang j, der modellhaft durch die Gleichung $j(x) = 80\ln(\frac{60x}{3-x})$ beschrieben ist. Der Schnitt durch den Stamm der Eiche wird näherungsweise als Kreis angenommen. Der Durchmesser wird in einer Höhe von 1, 30 m über dem Boden gemessen. Nebenstehende Abbildung zeigt den Graphen der Funktion j Mit der Definitionsmenge $D_j = [0{,}067; 2{,}95]$. Der Graph G_j der Funktion j besitzt einen Wendepunkt.
Die Altersangaben sind auf ganze Jahre zu runden. Auf die Mitführung von Einheiten kann verzichtet werden.



a) Bestimmen Sie das Alter einer Eiche, wenn in einer Höhe von 1,30 m der Umfang des Stammes 600 cm beträgt.
b) Ermitteln Sie die Wertemenge der Funktion j – auch unter Verwendung des Graphen – und interpretieren Sie Ihr Ergebnis im Sachzusammenhang.
c) Eine der folgenden vier Abbildungen zeigt den Graphen der ersten Ableitungsfunktion j'. Geben Sie den Buchstaben des richtigen Graphen an und stützen Sie Ihre Wahl durch ein Argument. Begründen Sie für jeden anderen Graphen mit einem stichhaltigen Argument, warum dieser nicht in Frage kommt.



d) Gegeben ist die Gleichung der zweiten Ableitung $j''(x) = \frac{-240(3-2x)}{(3x-x^2)^2}$ der Funktion j (Nachweis nicht erforderlich!). Berechnen Sie die Koordinaten des Wendepunktes W von G_j und erläutern Sie die Bedeutung im Sachzusammenhang. (vgl. Abitur NT2019)

5. Bewegt sich ein geladenes Teilchen durch Materie, so verliert es Energie durch Stöße mit den Elektronen. Der Energieverlust dE pro zurückgelegter Strecke dx ist dabei in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit v (für kleine Geschwindigkeiten $0 < v \ll c$) gegeben durch

$$\frac{dE}{dx} = f(v) = -\frac{4\pi n z^2}{m_e v^2}\left(\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \ln\left(\frac{2m_e v^2}{I}\right).$$

Dabei ist n die Elektronendichte des Materials, z die Ladungszahl des Teilchens, m_e die Elektronenmasse, q_e die Elektronenladung, ε_0 die elektrische Feldkonstante und I die mittlere Anregungsenergie der Elektronen des Materials. („Bethe-Formel", nach dem Physiker Hans Bethe, 1906-2005, der sie um 1932 aufstellte – bzw. eigentlich die kompliziertere Version, die auch für hohe Geschwindigkeiten gilt.)
Berechnen Sie, für welche Geschwindigkeit der Energieverlust maximal (also $f(v)$ minimal) ist.

Anwendungen der Arcustangensfunktion

1. Beim senkrechten Wurf nach oben ist eigentlich neben der Schwerebeschleunigung g nach unten auch noch eine Beschleunigung nach unten wegen des Luftwiderstands zu berücksichtigen, die man als eine positive Konstante k mal das Quadrat der Geschwindigkeit v ansetzen kann. Für die Zeit t, die vergeht, bis ein nach oben geworfener Körper nur noch die Geschwindigkeit v hat, ergibt sich dann:

$$t(v) = \frac{1}{\sqrt{kg}} \arctan\left(\frac{\sqrt{kg}(v_0 - v)}{g + kv_0 v}\right)$$

mit $0 \leq v \leq v_0$ und $g = +9{,}81\,\frac{m}{s^2}$.

a) Ermitteln Sie die Nullstelle dieser Funktion und geben Sie damit die physikalische Bedeutung der Konstante v_0 an.

b) Geben Sie die Zeit an, die vergeht, bis der geworfene Körper am höchsten Punkt seiner Flugbahn ankommt.

c) Zeigen Sie, dass man für die Ableitung $t'(v) = -\frac{1}{g+kv^2}$ schreiben kann, und ermitteln Sie die Monotonie von $t(v)$.

2. Eine Drehung um eine Achse a kann auf eine Drehung um eine Achse b, die mit a den Winkel γ einschließt, übertragen werden, indem man ein Kardangelenk benutzt (siehe Abbildung). Dreht sich die Achse a um den Winkel α, so dreht sich dann die Achse b um den Winkel β mit

$$\beta = \arctan\left(\frac{\tan\alpha}{\cos\gamma}\right).$$

Die Achse a rotiere nun mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω_a, d.h. $\alpha = \omega_a\, t$.

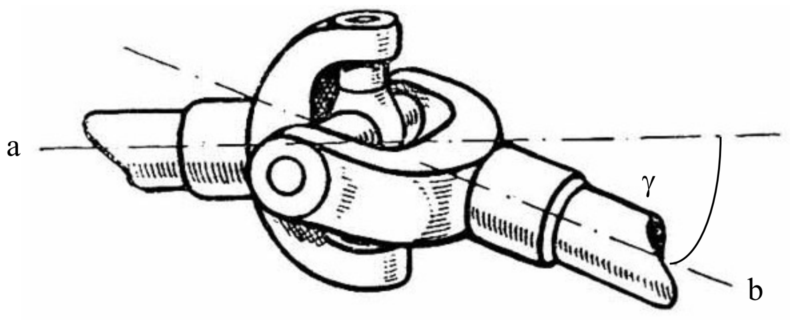
a) Zeigen Sie, dass die Winkelgeschwindigkeit ω_b der Achse b in Abhängigkeit von der Zeit t gegeben ist durch

$$\omega_b(t) = \dot{\beta}(t) = \frac{\omega_a}{\cos\gamma\,\cos^2(\omega_a\, t) + \frac{1}{\cos\gamma}\,\sin^2(\omega_a\, t)}.$$

b) Zeigen Sie: Zu allen Zeiten t, zu denen

$$\cos(\omega_a\, t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\cos\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$$

gilt, sind die beiden Winkelgeschwindigkeiten jeweils gleich groß.



Lösungen zu Anwendungen von Wurzelfunktionen

1. mit Trigonometrie folgt für die Strecke, die das Regenwasser fließt: s = $\frac{b}{2\cos\alpha}$

   Auf das Regenwasser wirkt die konstante Hangabtriebskraft F_H = m g sin α, deswegen haben wir hier eine Bewegung mit konstanter Beschleunigung a = g sin α, also ist s = $\frac{1}{2} g \sin\alpha\, t^2$

   gleichsetzen ➔ t = $\sqrt{\frac{b}{g \sin\alpha \cos}}$; mit sin(2α) = 2 sin α cos α (FS!) folgt dann das angegebene Ergebnis

   t(α) = $\sqrt{\frac{2\,b}{g}} \cdot (\sin(2\,\alpha))^{-1/2}$ ➔ t'(α) = $\sqrt{\frac{2\,b}{g}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (\sin(2\,\alpha))^{-3/2} \cdot \cos(2\alpha) \cdot 2 = -\sqrt{\frac{2\,b}{g}}\,\frac{\cos(2\alpha)}{\sqrt{\sin(2\alpha)}^3}$

   t'(α) = 0 ➔ $\cos(2\alpha)$ = 0; einzige Lösung in D: α = 45°

   $\cos(2\alpha)$ wechselt dort das VZ von + nach – ➔ t'(α) = 0 wechselt VZ von – nach + ➔ Minimum

   Da dies das einzige Extremum in D ist, und da die Funktion t(α) stetig ist, ist die Zeit für diesen Winkel absolut minimal.

2. Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit: $t = \frac{s}{v}$; dabei ist s_1 = x und s_2 ist die Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck mit den Katheten $\overline{DB} = 5 - x$ und $\overline{BC} = 1$; außerdem ist v_1 = 5 und v_2 = 4.

   Damit folgt für die gesamte Zeit t = $t_1 + t_2$ das angegebene Ergebnis.

   t'(x) = $\frac{1}{5} + \frac{1}{4\cdot 2\sqrt{x^2-10x+26}} \cdot (2x - 10)$; t'(x) = 0 ..... ➔ $\frac{1}{25}(x^2 - 10x + 26) = \frac{1}{16} \cdot (x^2 - 10x + 25)$

   ... ➔ $x_1 = \frac{11}{3}$ ($; x_2 = \frac{19}{3} \notin D = [0; 5]$; Probe nicht vergessen!

   t'(3) ≈ $-0{,}02 < 0$; t'(4) ≈ $0{,}02 > 0$ ➔ VZW von t' bei x_1 von – nach + ➔ Minimum

   Da dies das einzige Extremum in D ist, und da die Funktion t(x) stetig ist, ist die Zeit für diesen Wert von x absolut minimal.

3. a) Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit: $t = \frac{s}{v}$; dabei ist $s_1 = \overline{AC}$ und $s_2 = \overline{CB}$ und $v_1 = v_2 = c_1$

   mit dem Satz des Pythagoras folgt dann für die gesamte Zeit t = $t_1 + t_2$:

   $$t(x) = \frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b+(d-x)^2}}{c_1}$$

   Damit diese Zeit extremal wird, muss t'(x) = 0 gelten, also

   $$\frac{1}{c_1 \cdot 2\sqrt{a^2+x^2}} \cdot 2x + \frac{1}{c_1 \cdot 2\sqrt{b+(d-x)^2}} \cdot 2(d-x)\cdot(-1) = 0$$

   $$\Longrightarrow \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{\sqrt{b+(d-x)^2}}$$

   Oben stehen nun jeweils die Gegenkatheten zu den Winkeln in den beiden rechtwinkligen Dreiecken, unten die Hypotenusen, also folgt: sin α = sin β. Da beide Winkel zwischen 0° und 90° liegen müssen, hat diese Gleichung nur die eine Lösung α = β.

   b) Wie in (a) folgt: t(x) = $\frac{\sqrt{a^2+x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b+(d-x)^2}}{c_2}$.

   Aus t'(x) = 0 folgt nun $\frac{x}{c_1\sqrt{a^2+x^2}} = \frac{d-x}{c_2\sqrt{b+(d-x)^2}}$, also $\frac{\sin\alpha}{c_1} = \frac{\sin\beta}{c_2}$, und daraus folgt die Behauptung.

4. a) $f'(x) = \frac{1}{2\left(\sqrt{1-x}\right)^3}$ ➔ $m = f'(0) = \frac{1}{2}$; außerdem ist $f(0) = 1$. Daraus folgt für die Gleichung der Tangente: $y = \frac{1}{2}x + 1$. Die Tangente berührt den Graphen von f bei x_0 = 0, unterscheidet sich in der Nähe von x = 0 also kaum vom Graph. Deshalb gilt für kleine Werte von x eben $\frac{1}{\sqrt{1-x}} \approx \frac{1}{2}x + 1$.

b) in der Näherung aus (a) x = $\frac{v^2}{c^2}$ einsetzen➔ $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} + 1$ ➔ $\gamma - 1 \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2}$

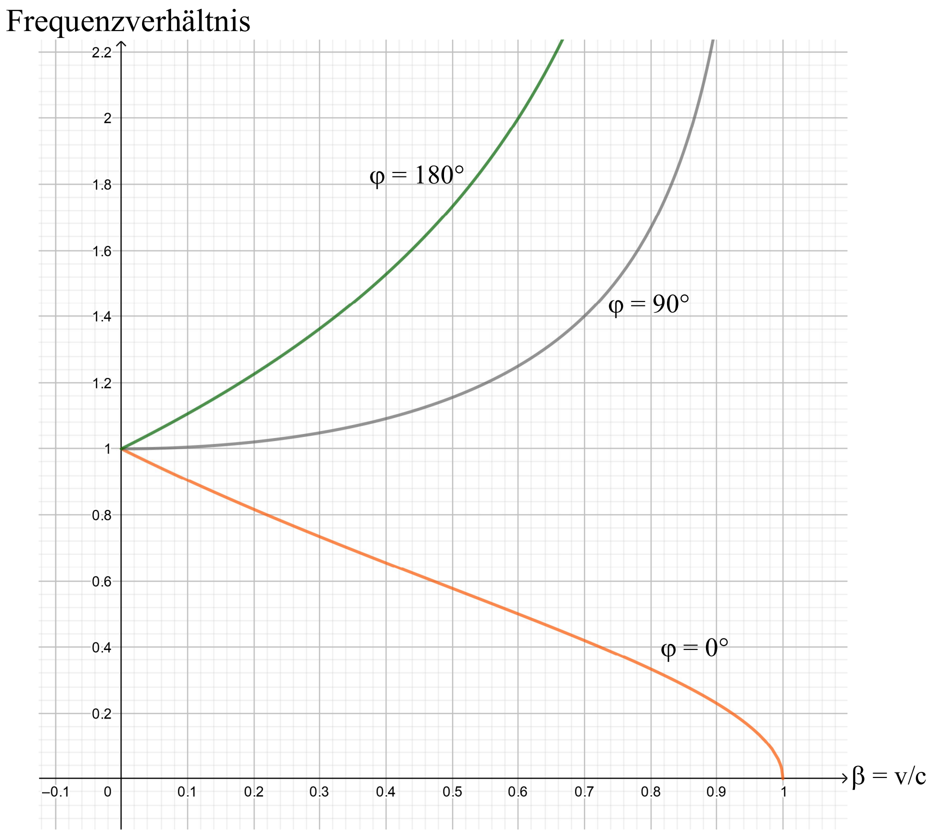
➔ $E_{kin} = (\gamma - 1)mc^2 \approx \frac{1}{2}\frac{v^2}{c^2} \cdot mc^2 = \frac{1}{2}mc^2$

5.

$g_{0°}(\beta) = \frac{1-\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1-\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \frac{\sqrt{1-\beta}}{\sqrt{1+\beta}} = \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$; $\lim_{\beta\to 0} g_{0°}(\beta) = 1^-$; $\lim_{\beta\to 1} g_{0°}(\beta) = 0^+$

$g_{90°}(\beta) = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$; $\lim_{\beta\to 0} g_{90°}(\beta) = 1^+$; $\lim_{\beta\to 1} g_{90°}(\beta) = +\infty$

$g_{180°}(\beta) = \frac{1+\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1+\beta}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} = \frac{\sqrt{1+\beta}}{\sqrt{1-\beta}} = \sqrt{\frac{1+\beta}{1-\beta}}$; $\lim_{\beta\to 0} g_{180°}(\beta) = 1^+$; $\lim_{\beta\to 1} g_{180°}(\beta) = +\infty$



Für einen Winkel von 0° zwischen Bewegungsrichtung des Senders und der Blickrichtung, wenn sich der Sender also vom Empfänger entfernt, ist das Frequenzverhältnis immer kleiner als 1, d. h. die empfangene Frequenz ist kleiner als die gesendete (Rotverschiebung). Für $\beta \to 1$, also $v \to c$, geht die empfangene Frequenz gegen 0, d. h. sie wird immer kleiner, und im Grenzfall, dass sich der Sender mit Lichtgeschwindigkeit entfernt, empfängt man gar nichts mehr.

Für einen Winkel von 180° zwischen Bewegungsrichtung des Senders und der Blickrichtung, wenn sich der Sender also auf den Empfänger zu bewegt, ist das Frequenzverhältnis immer größer als 1, d. h. die empfangene Frequenz ist größer als die empfangene (Blauverschiebung). Für $\beta \to 1$, also $v \to c$, geht die empfangene Frequenz gegen ∞, d. h. sie wird immer größer, und im Grenzfall, dass sich der Sender mit Lichtgeschwindigkeit auf den Empfänger zu bewegt, würde man eine unendlich hohe Frequenz empfangen.

Für einen Winkel von 90°, wenn sich der Sender also gerade am Empfänger vorbei bewegt, ist das Grenzverhalten ähnlich wie bei 180°, allerdings geht das Frequenzverhältnis deutlich langsamer gegen ∞. Auch in diesem Fall tritt also (im Gegensatz zum akustischen Dopplereffekt!) eine Frequenzerhöhung (Blauverschiebung) auf („transversaler Dopplereffekt").

Man beachte übrigens noch, dass hier nur die relative Geschwindigkeit zwischen Sender und Empfänger wesentlich ist – im Gegensatz zum akustischen Dopplereffekt, bei dem man jeweils unterscheiden muss, ob sich der Sender oder Empfänger bewegt. Das liegt letztlich daran, dass Schallwellen im Gegensatz zu Lichtwellen ein Medium für ihre Ausbreitung brauchen; relevant sind in diesem Fall dann die Geschwindigkeiten relativ zum Medium, nicht relativ zueinander.

Lösungen zu Anwendungen der natürlichen Logarithmusfunktion

1. a) π(1 000 000) ≈ 72 382 und π(1 000 000 000) ≈ 48 254 942.
   b) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x}{\ln(x)} = \infty$ (Potenz gewinnt gegen Logarithmus), d. h., es gibt unendlich viele Primzahlen.
   c) π(x)/x gibt die „Primzahldichte" an, wie viele Primzahlen es also im Verhältnis zu allen Zahlen gibt. $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\pi(x)}{\mathrm{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0$, die Primzahldichte nimmt also immer mehr ab: Für große Zahlen x gibt es immer weniger Primzahlen im Verhältnis zu allen Zahlen.

2. a) S(E) = $\frac{3}{2} k_B N \ln(E) + const.$ ➔ $\frac{1}{T} = \frac{dS}{dE} = \frac{3}{2}\frac{k_B N}{E}$ ➔ E = $\frac{3}{2} N k_B T$
   b) S(V) = $k_B N \ln(V) + const.$ ➔ $\frac{p}{T} = \frac{dS}{dV} = \frac{k_B N}{V}$ ➔ pV = $N k_B T$ (ideale Gasgleichung!)

3. a) v(50) = $2500 \cdot ln\left(\frac{600}{600-4\cdot 50}\right) \approx 1014$
   Nach 50 s hat die Rakete eine Geschwindigkeit von etwa 1014 m/s erreicht.
   b) $v(t) = 2500 \cdot ln\left(\frac{600}{600-4\cdot t}\right) = 2500$ ➔ … t = 150 (1 – 1/e) ≈ 95
   $\frac{m\left(150\left(1-\frac{1}{e}\right)\right)}{m_0} = \frac{600-4\cdot 150\,(1-\frac{1}{e})}{600} = \frac{1}{e}$
   ➔ Nach 95 s hat die Rakete dieselbe Geschwindigkeit erreicht wie die Ausstoßgeschwindigkeit des Treibstoffs; ihre Masse beträgt dann noch 1/e der Anfangsmasse.
   (Dasselbe ergibt sich übrigens, wenn man mit einem allgemeinen m(t) rechnet statt mit diesem speziellen Beispiel.
   c) $\lim\limits_{t\to 150^-} 2500 \cdot ln\left(\frac{600}{600-4\cdot t}\right) = \infty$
   Nach 150 s wäre die Geschwindigkeit unendlich groß. Die restliche Masse wäre dann gleich 0, d.h., nicht nur der Treibstoff, sondern auch der Rest der Rakete müsste komplett weg sein. Das kann in der Realität natürlich nicht auftreten. (Dazu kommt noch, dass man sowieso nicht schneller als die Lichtgeschwindigkeit werden kann; man müsste hier eine relativistische Verallgemeinerung der Ziolkoswki-Gleichung betrachten.)
   d) $a(t) = \dot{v}(t) = \cdots = v_T \cdot \frac{\mu}{m_0 - \mu\, t} - g$
   Damit die Rakete zu jeder Zeit $0 \le t < \frac{m_0}{\mu}$ nach oben beschleunigt, muss $v_T \cdot \frac{\mu}{m_0-\mu\, t} - g > 0$ gelten.
   ➔ $v_T \cdot \mu > g \cdot m_0 - \mu\, g\, t$
   Wegen $t \ge 0$ ist für $v_T \cdot \mu > m_0 \cdot g$ diese Ungleichung immer erfüllt. (Alternativ: Linke Seite auf einen Bruchstrich bringen, VZT verwenden!)

4.

32.1

Umfang: $2r\pi = 600 \Rightarrow r = \frac{600}{2\pi} \approx 95{,}49$ cm ⇒ Durchmesser: 190,99 cm 1,91 m

$j(1{,}91) \approx 372$ Jahre

32.2

$j(0{,}067) \approx 25$ $j(2{,}95) \approx 654$ $\Rightarrow W = [25;654]$

Das Modell gilt im Alter von 25 bis 654 Jahren.

32.3

a) scheidet aus, weil j' Nullstellen besitzt, also G_j Extrempunkte haben müsste.

d) scheidet aus, weil $G_{j'}$ zwei Extrempunkte besitzt,
also müsste G_j zwei Wendepunkte besitzen.

b) scheidet aus, weil $G_{j'}$ keinen Extrempunkt besitzt
und somit G_j keinen Wendepunkt haben dürfte.

$\Rightarrow$ es muss c) sein, weil $G_{j'}$ einen Extrempunkt hat und deshalb G_j einen Wendepunkt besitzt.

32.4

$j''(x)=\dfrac{-240(3-2x)}{\left(3x-x^2\right)^2}$ $\qquad j''(x)=0 \;\Rightarrow -240(3-2x)=0 \;\Rightarrow 3-2x=0 \;\Rightarrow x=1{,}5$

Skizze von j'': Nenner immer positiv
Skizze von $\left(-240(3-2x)\right)$:

$\Rightarrow x=1{,}5$ WP wegen VZW $\;\Rightarrow \mathrm{WP}\left(1{,}5\,|\,328\right)$

Die Zunahme des Alters ist dort bei zunehmendem Stammdurchmesser am geringsten.

5. $\ln\left(\frac{2m_e v^2}{I}\right) = 2\ln|v| + \ln\left(\frac{2m_e}{I}\right) \Rightarrow \left(\ln\left(\frac{2m_e v^2}{I}\right)\right)' = \frac{2}{v}$

$\Rightarrow f'(v) = \frac{8\pi n z^2}{m_e v^3}\left(\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \ln\left(\frac{2m_e v^2}{I}\right) - \frac{4\pi n z^2}{m_e v^2}\left(\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \frac{2}{v} = \frac{8\pi n z^2}{m_e v^3}\left(\frac{q_e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \cdot \left(\ln\left(\frac{2m_e v^2}{I}\right) - 1\right)$

$f'(v) = 0 \Rightarrow \ln\left(\frac{2m_e v^2}{I}\right) - 1 \Rightarrow \frac{2m_e v^2}{I} = e \Rightarrow v = \sqrt{\frac{I\,e}{2m_e}}$

Der Vorfaktor ist für v > 0 positiv, der Faktor in der Klammer wechselt das VZ von – nach +. Also liegt ein Minimum vor. (Weil dies das einzige Minimum ist und f stetig ist, ist es auch absolut.)

Lösungen zu Anwendungen der Arcustangensfunktion

1. a) $t(v) = 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{kg}} \arctan\left(\frac{\sqrt{kg}(v_0 - v)}{g + kv_0 v}\right) = 0 \Rightarrow \arctan\left(\frac{\sqrt{kg}(v_0 - v)}{g + kv_0 v}\right) = 0 \Rightarrow \frac{\sqrt{kg}(v_0 - v)}{g + kv_0 v} = 0$
$\Rightarrow \sqrt{kg}(v_0 - v) = 0 \Rightarrow v = v_0$
d.h., damit der geworfene Körper die Geschwindigkeit v_0 hat, muss die Zeit t = 0 vergehen, mit anderen Worten: v_0 ist die Abwurfgeschwindigkeit (nach oben)
b) Am höchsten Punkt ist die Geschwindigkeit $v = 0$, also ergibt sich für die „Steigzeit‘‘:

$$t_S = t(0) = \frac{1}{\sqrt{kg}} \arctan\left(\frac{\sqrt{kg}(v_0 - 0)}{g + kv_0 \cdot 0}\right) = \frac{1}{\sqrt{kg}} \arctan\left(\sqrt{\frac{k}{g}}\, v_0\right)$$

c) $t'(v) = \frac{1}{\sqrt{kg}} \frac{1}{1+\left(\frac{\sqrt{kg}(v_0-v)}{g+kv_0 v}\right)^2} \cdot \left(\frac{\sqrt{kg}(v_0-v)}{g+kv_0 v}\right)' = \frac{1}{\sqrt{kg}} \frac{1}{1+\frac{kg(v_0-v)^2}{(g+kv_0 v)^2}} \cdot \sqrt{kg} \cdot \left(\frac{(v_0-v)}{g+kv_0 v}\right)'$

$= \frac{1}{1+\frac{kg(v_0-v)^2}{(g+kv_0 v)^2}} \cdot \frac{-1\cdot(g+kv_0 v)-(v_0-v)\cdot kv_0}{(g+kv_0 v)^2} = \frac{-g-kv_0 v-kv_0^2+kv_0 v}{(g+kv_0 v)^2+kg(v_0-v)^2} = -\frac{g+kv_0^2}{(g+kv_0 v)^2+kg(v_0-v)^2}$

$= -\frac{g+kv_0^2}{g^2+2gkv_0 v+k^2v_0^2v^2+kgv_0^2-2kgv_0 v+kgv^2} = -\frac{g+kv_0^2}{g^2+kgv_0^2+kgv^2+k^2v_0^2v^2}$

$= -\frac{g+kv_0^2}{g(g+kv_0^2)+kv^2(g+kv_0^2)} = -\frac{g+kv_0^2}{(g+kv^2)(g+kv_0^2)} = -\frac{1}{g+kv^2}$

Da g > 0 und k > 0 sind und alle Quadrate sowieso immer ≥ 0 sind, folgt, dass der Nenner dieses Bruchs positiv ist, also ist $t'(v) < 0$, d. h. $t(v)$ ist eine streng monoton abnehmende Funktion. (Was auch physikalisch Sinn ergibt: Damit nur noch eine kleinere Geschwindigkeit vorhanden ist, ist natürlich eine größere Zeit nötig, und umgekehrt.)

2. a) $\beta(t) = \arctan \frac{\tan(\omega_a t)}{\cos\gamma}$

==> $\omega_b(t) = \dot{\beta}(t) = \frac{1}{1+\left(\frac{\tan(\omega_a t)}{\cos\gamma}\right)^2} \cdot \left(\frac{\tan(\omega_a t)}{\cos\gamma}\right)' = \frac{1}{1+\left(\frac{\tan(\omega_a t)}{\cos\gamma}\right)^2} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \frac{1}{\cos^2(\omega_a t)} \cdot \omega_a$

$= \frac{1}{1+\frac{1}{\cos^2\gamma}\frac{\sin^2(\omega_a t)}{\cos^2(\omega_a t)}} \cdot \frac{1}{\cos\gamma} \cdot \frac{1}{\cos^2(\omega_a t)} \cdot \omega_a = \frac{\omega_a}{\cos\gamma\cos^2(\omega_a t)+\frac{1}{\cos\gamma}\sin^2(\omega_a t)}$

b) $\omega_b = \omega_a$ ==> $\cos\gamma\cos^2(\omega_a t) + \frac{1}{\cos\gamma}\sin^2(\omega_a t) = 1$

==> $\cos^2\gamma\cos^2(\omega_a t) + (1-\cos^2(\omega_a t)) = \cos\gamma$

==> $(\cos^2\gamma - 1)\cos^2(\omega_a t) = \cos\gamma - 1$ ==> $\cos^2(\omega_a t) = \frac{\cos\gamma-1}{\cos^2\gamma-1} = \frac{\cos\gamma-1}{(\cos\gamma\quad)(\cos\gamma+1)} = \frac{1}{1+\cos\gamma}$

mit FS: $\cos^2(\omega_a t) = \frac{1}{2\cos^2(\frac{\gamma}{2})}$ ==> $\cos(\omega_a t) = \pm\frac{1}{\sqrt{2}\cos(\frac{\gamma}{2})}$

Es bleibt noch, die (unendlich vielen) Lösungen dieser Gleichung zu bestimmen, vgl. Klasse 12.